



FLIP FLAP

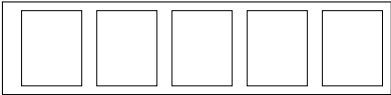
Fiche de solutions et suggestions à destination des animateurs et animatrices

Niveau jaune (J) jusqu'à 10 ans environ, ou école primaire

Niveau orange (O) collège, lycée, grand public

Niveau bleu (B) expert·e ayant fait des mathématiques dans le supérieur

Matériel fourni sur le stand

- des cartes recto/verso bicolores bleu clair/bleu foncé, 
- des plateaux de jeu marquant des emplacements pour les cartes, afin de bien garder une trace des espaces laissés par les cartes déjà retirées, 
- des feuilles blanches et à carreaux pour réfléchir et garder une trace des étapes d'une partie,
- un tableau de toutes les configurations possibles à n cartes avec $1 \leq n \leq 4$.

Gestion du temps

Quand l'activité est contrainte par le temps (rallye du vendredi par exemple), on suggère :

- 5 minutes pour les premiers essais pour comprendre le jeu (questions 1 à 3),
- 10 minutes pour traiter (collectivement) tous les premiers cas et formuler une conjecture (questions 4 à 6),
- 15 minutes pour la démontrer,
- éventuellement 5 minutes pour jouer avec une généralisation du jeu.

Résumé de la solution (attention, spoiler !)

On va montrer qu'une configuration de jeu est gagnante si et seulement si le nombre de cartes à l'endroit est impair. Cela permet de savoir comment jouer : pour gagner, quand on retire une carte, on doit toujours s'arranger pour que les « composantes connexes » restantes gardent toutes un nombre impair de cartes à l'endroit.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de cartes, que l'on ne formalise pas pour la plupart des participant·es, mais que l'on peut expliciter avec des terminales spé maths.

J1, O1, B1 Cette première question sert tout d'abord à s'assurer que tout le monde a compris les règles et permet à chacun·e de se familiariser avec le jeu. C'est important de bien comprendre qu'on ne retourne que la/les voisines "immédiates" de la carte que l'on retire : par exemple, si ses deux voisines ont déjà été retirées, on ne retourne aucune carte (on ne retourne pas les cartes les plus proches). Attention, ce n'est pas facile de retourner en arrière quand on a fait une erreur. Il peut être utile de noter les différentes étapes par lesquelles on passe.

Elle sert aussi à comprendre que l'ordre dans lequel on choisit de jouer a une importance. Avec cette configuration initiale, il est possible de gagner en jouant bien, mais on peut aussi perdre.

Dans l'exemple proposé, on a trois choix possibles pour la première carte à retirer. Commencer par retirer la première ou la quatrième carte permet de gagner, mais retirer la troisième jamais. On indique ci-dessous les trois façons de commencer la partie qui permettent de gagner (1 signifie qu'on retire la carte au-dessus lors du 1er coup, 2 lors du deuxième coup).

1	2	x	x	x	x
1	x	x	2	x	x
x	x	x	1	x	x

J2, O2, B2 S'il n'y a que des cartes à l'envers, on ne peut pas gagner.

On peut aussi proposer , ou ou ...

Cette question permet bien sûr de s'apercevoir qu'il existe des configurations perdantes, mais aussi de s'interroger sur comment être sûr qu'une configuration est perdante (perdre en y jouant ne suffit pas, on doit vérifier que tous les choix possibles mènent à une défaite).

J3, O3, B3 Si la carte à l'endroit est à une extrémité, on l'enlève et on recommence (un peu comme des dominos). On gagne à coup sûr.

Si elle n'est pas à une extrémité, en l'enlevant on coupe notre ligne en deux morceaux, que l'on peut jouer indépendamment (un coup joué sur un côté n'a pas d'influence sur l'autre côté). On peut les voir comme deux jeux séparés, et chacun a une unique carte à l'endroit à une extrémité; comme dans le cas précédent, on gagne à coup sûr.

J4, O4, B4 On ne recopie pas ici le tableau de solutions, il vous suffira de savoir qu'on peut gagner si et seulement si le nombre de cartes à l'endroit est impair (quels que soient le nombre total de cartes et le nombre de cartes à l'envers).

Il peut être utile que les participant·es remarquent à ce stade que pour savoir si une configuration à 4 cartes permet ou non de gagner, on essaie de retirer une carte et on est ramené à un cas étudié précédemment (avec 3 cartes) ou deux cas étudiés précédemment (avec 1 et 2 cartes), que l'on n'est pas obligé de refaire. Cela peut permettre d'amener assez naturellement la récurrence qui suivra.

O5, B5 Le cas n'apparaît pas tel quel dans le tableau, mais il se traite exactement comme , par symétrie (on peut échanger gauche et droite).

Dans le tableau, on a bien fait figurer tous les cas possibles, à ces symétries près.

J5 O6, B6 La conjecture a déjà été formulée juste avant. Le « si et seulement si » peut bien sûr être formulé différemment, par exemple en disant : si le nombre de cartes à l'endroit est impair, on peut gagner, et s'il est pair on ne peut pas gagner. Mais s'assurer d'avoir bien une condition nécessaire et suffisante, et pas juste « quand le nombre cartes à l'endroit est impair on peut gagner ».

Un nombre impair de cartes à l'endroit

Dans cette partie, on suppose que le nombre de cartes à l'endroit est impair. On traite le cas général dans les fiches orange et bleue, seulement un exemple dans la fiche jaune (que l'on espère assez général pour convaincre qu'on pourrait faire pareil en général. . .)

O7 On enlève une carte à l'endroit, ce qui, avant de retourner sa voisine, change la parité du nombre de cartes à l'endroit (il est diminué de 1) qui devient donc pair. On retourne aussi une carte, ce qui change également la parité du nombre de cartes à l'endroit (qui est augmenté de 1 si la voisine était à l'envers, diminué de 1 si elle était à l'endroit). Finalement, le nombre de cartes à l'endroit reste impair (il est resté le même ou a été diminué de 2).

O8 Le nombre g de cartes à l'endroit à gauche de la carte enlevée est diminué de 1 (si la voisine de gauche était à l'endroit) ou augmenté de 1 si la voisine de gauche était à l'envers. C'est la même chose pour les cartes à droite de la carte enlevée.

O9 Donnons un algorithme récursif qui permet de gagner. S'il n'y a qu'une carte, elle est à l'endroit, et il suffit de la retirer pour gagner. S'il y a strictement plus qu'une carte, on retire une carte (à l'endroit) de telle sorte qu'elle soit ou bien à une extrémité, auquel cas on applique la stratégie sur les cartes restantes, ou alors de telle sorte qu'il y ait à sa gauche et à sa droite un nombre pair de cartes à l'endroit, ce qui fait qu'une fois enlevée il en reste deux sous-jeux que l'on peut jouer indépendamment (ils n'influent pas l'un sur l'autre), et qui ont chacun un nombre impair de cartes à l'endroit. Choisir une telle carte est toujours possible : il suffit de prendre une carte à l'endroit avec un rang impair (la première à l'endroit, pas la deuxième, la troisième à l'endroit etc.)

En fonction des connaissances mathématiques des participant·es, on n'est pas du tout obligé de formaliser cette récurrence. On peut expliquer la stratégie en disant qu'on s'assure toujours de ne laisser des sous-jeux qu'avec un nombre impair de cartes à l'endroit, et comme leur taille diminue, au bout d'un moment ils n'ont plus qu'une carte.

Une autre remarque : quand il y a un nombre impair de cartes à l'endroit, on peut toujours gagner en retirant tout simplement la carte à l'endroit la plus à gauche (ou la plus à droite). Il n'y a pas besoin de réfléchir ! Certaines personnes le verront peut-être assez naturellement comme cela. (On peut aussi faire directement une démonstration par récurrence que cette stratégie est gagnante).

J6-J7 À ce niveau, on ne demande pas de faire la démonstration générale mais on joue sur un exemple. Il y a 7 cartes à l'endroit, ce qui est un nombre impair. En enlevant la première à l'endroit (la deuxième carte en partant de la gauche) ou la troisième, ou la cinquième, ou la septième, on obtient deux morceaux de jeu avec un nombre impair de cartes. (Par contre, enlever la deuxième, la quatrième ou la sixième ne marche pas).

J8 Il s'agit de continuer de la même façon : toujours choisir une carte à l'endroit de telle sorte qu'après l'avoir enlevée on n'ait que des morceaux de ligne avec un nombre impair de cartes à l'endroit (sans essayer de montrer que c'est toujours possible).

Un nombre pair de cartes à l'endroit

Dans cette partie, on suppose que le nombre de cartes à l'endroit est pair. On ne le fait pas dans la fiche jaune. Dans la fiche orange, on détaille comme on l'a fait pour un nombre impair de cartes à l'endroit. Pour la fiche bleue, on laisse les personnes se débrouiller.

B10, O10-11-12 On peut procéder comme précédemment, on montre par récurrence sur le nombre n de cartes, $n \geq 1$, que si le nombre de cartes à l'endroit est pair, on ne peut pas gagner. Comme pour le

cas précédent, on n'est pas obligé de formaliser la récurrence auprès des participant·es comme dans la rédaction ci-dessous.

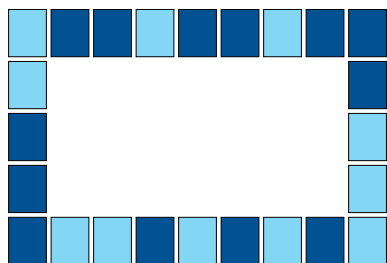
Si $n = 1$ la seule carte est à l'envers et on ne peut pas gagner. Soit $n \geq 2$ et jouons avec n cartes dont un nombre pair est à l'endroit. S'il n'y a aucune carte à l'endroit, on a perdu. Supposons qu'il y ait au moins une (donc au moins deux) cartes à l'endroit. On en retire une.

- Soit elle est à une extrémité. En la retirant, il reste un jeu avec $n - 1$ cartes, avec un nombre pair de cartes à l'endroit (une a été retirée et une carte retournée). On applique l'hypothèse de récurrence.
- Soit la carte retirée n'est pas à une extrémité, et elle coupe alors le jeu en deux sous-jeux indépendants (qui ont bien chacun au moins une carte). Avant de la retirer, il y avait nécessairement un nombre impair de cartes à l'endroit d'un côté de cette carte, et un nombre pair de l'autre. Quand on la retire, on change la parité du nombre cartes à l'endroit à gauche et à droite, mais il reste toujours un sous-jeu avec un nombre pair de cartes, et par hypothèse de récurrence on ne peut pas gagner sur ce sous-jeu, donc on ne peut pas gagner la partie.

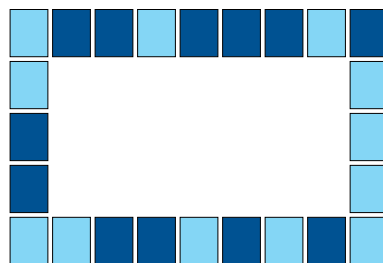
Généralisations

J9,O13,B11 On place les cartes en « cercle ». Ce cas se ramène très facilement au cas d'une ligne : si on retire une carte, on retrouve le même jeu qu'avant. Comme en retirant une carte on a changé la parité du nombre de cartes à l'endroit (on en a enlevé une, retourné ses deux voisines), on peut gagner cette variante du jeu si et seulement si le nombre de cartes à l'endroit est pair.

Dans les fiches jaune et orange, on se contente de traiter des exemples. Dans la fiche orange, c'est un exemple perdant. Il y a 11 cartes à l'endroit, si on en enlève une on a un jeu équivalent à une ligne, avec 10 cartes à l'endroit, et on ne peut pas gagner.



exemple fiche orange
11 cartes à l'endroit
perdant



exemple fiche jaune
12 cartes à l'endroit
gagnant

Dans la fiche jaune, l'exemple proposé est gagnant (il y a un nombre pair de cartes à l'endroit). Comme on n'a pas fait d'explication théorique complète à ce niveau, la réponse attendue est un exemple de manière de jouer menant à la victoire. On retire n'importe quelle carte à l'endroit pour commencer, et ensuite on joue de manière à ne laisser que des sous-jeux avec un nombre impair de cartes à l'endroit.

B12 Les cartes sont disposées en croix. Il y a 4 branches (certaines peuvent éventuellement être de longueur 0) et une carte centrale qui les relie.

Commençons par deux remarques.

- Si une branche non vide contient un nombre pair de cartes à l'endroit, on ne pourra pas en retirer toutes les cartes sans avoir retiré auparavant la carte centrale.

- Si une branche contient un nombre impair de cartes à l'endroit, pour gagner il faut nécessairement toutes les retirer avant de retirer la carte centrale (qui changerait la parité de cartes à l'endroit dans cette branche).

Condition nécessaire pour pouvoir gagner : il faut jouer toutes les cartes des branches qui ont un nombre impair de cartes à l'endroit. Chaque fois qu'on le fait, on retourne la carte centrale. Si la carte centrale est alors à l'envers (après avoir retiré toutes les cartes des branches ayant un nombre impair de cartes à l'endroit), on ne pourra pas gagner : s'il reste au moins une branche (non vide) avec un nombre pair de cartes à l'endroit, d'après la remarque faite au-dessus il faudrait pouvoir retirer la carte centrale avant de pouvoir terminer cette branche, ce qui n'est pas possible. S'il ne reste aucune branche avec un nombre pair de cartes, alors il ne reste que la carte centrale, à l'envers, et on a perdu.

Ainsi, si le nombre de branches contenant un nombre impair de cartes est impair et la carte centrale est à l'endroit, on perd. Si le nombre de branches contenant un nombre impair de cartes est pair et la carte centrale est à l'envers, on perd.

Condition suffisante : on montre que les deux autres cas sont gagnants grâce au travail fait sur le jeu avec une ligne.

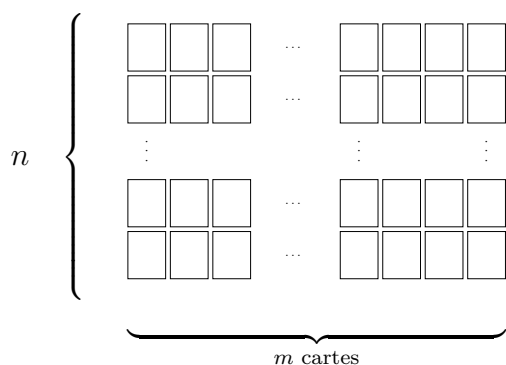
Si le nombre de branches contenant un nombre impair de cartes à l'endroit est impair, et que la carte centrale est à l'envers, alors on peut retirer toutes les cartes de ces branches et après l'avoir fait la carte centrale est à l'endroit. On la retire. S'il ne reste pas de branche non vide, on a gagné. S'il reste des branches non vides, elles ont maintenant un nombre impair de cartes à l'endroit (en retirant la carte centrale, on a retourné l'une de leurs extrémités). On peut donc retirer toutes leurs cartes et gagner.

Si le nombre de branches contenant un nombre impair de cartes à l'endroit est pair, et que la carte centrale est à l'endroit, c'est pareil : on peut retirer toutes les cartes de ces branches et après l'avoir fait la carte centrale est encore à l'endroit. On termine l'argument comme ci-dessus.

J10, O14 Pour conclure ces fiches, on propose juste d'essayer de jouer sur la grille proposée (qui est gagnante), sans trouver une stratégie générale. En pratique, gagner est assez facile si on prend garde à ne pas laisser de cartes à l'envers isolée. Beaucoup de stratégies mènent à la victoire.

On propose une manière de procéder plus systématique dans la réponse ci-dessous pour la fiche bleue.

B13 Les cartes sont disposées selon un rectangle de n lignes et m colonnes, il y a un nombre impair de cartes à l'endroit.



Supposons que le nombre de colonnes m est impair. On va procéder en jouant par lignes, c'est-à-dire toujours jouer toutes les cartes d'une ligne avant de passer à une autre.

On va dire qu'une ligne est à *l'endroit* si elle a un nombre impair de cartes à l'endroit, c'est-à-dire si on peut retirer toutes les cartes de cette ligne (sans jouer ailleurs), et qu'elle est à *l'envers* sinon (en ce cas elle a un nombre pair de carte à l'endroit, on ne peut pas retirer toutes ses cartes).

Comme le nombre total de cartes à l'endroit dans le rectangle est impair, le jeu a un nombre impair de lignes à l'endroit.

Que se passe-t-il si on retire entièrement une ligne à l'endroit (en retirant ses cartes comme on l'a vu en étudiant les jeux à une seule ligne) ? On retourne au passage toutes les cartes des lignes voisines, c'est-à-dire de la ligne juste au-dessus s'il y en a une, et/ou juste en-dessous s'il y en a une. Comme les lignes ont un nombre m impair de cartes, retourner toutes leurs cartes change la parité de leur nombre de cartes à l'endroit. Donc on transforme une ligne voisine qui était à l'endroit en une ligne à l'envers, et réciproquement. On peut donc jouer exactement comme on le faisait précédemment, mais avec à chaque fois toute une ligne au lieu d'une seule carte !

Si m est pair, alors n est impair et on fait la même chose avec les colonnes du jeu au lieu des lignes.