



Un seul dé

Niveau jaune (J) jusqu'à 10 ans environ, ou école primaire

Niveau orange (O) collège, lycée, grand public

Niveau bleu (B) expert·e ayant fait des mathématiques dans le supérieur

Matériel (pour un groupe de $N = 12$ élèves) :

- papier, crayons/stylos/feutres de plusieurs couleurs ;
- N lots de jetons "pièce" de 6 couleurs différentes, une face marquée 1, l'autre 2 ;
- des petits dés à 3/4/6/8/12/20 faces, notamment :
 - N lots de dés à 3 faces de 4 couleurs différentes,
 - N lots de dés à 4 faces de 3 couleurs différentes,
 - N lots de dés à 6 faces de 2 couleurs différentes,
 - N dés à 12 faces.
- au moins 50 étiquettes blanches autocollantes pour coller sur les faces de dés ;
- des gros dés à 4/6/8/12/20 faces, notamment :
 - un classique marqué 1/2/3/4,
 - un 2/3/3/4,
 - un 2/2/3/4,
 - un 2/2/4/4,
 - au moins deux vierges pour faire des essais;
- au moins six gros dés 8 octaèdre :
 - un classique marqué 1/2/3/4/5/6/7/8,
 - un 3/4/4/4/5/5/5/6,
 - un 3/3/4/4/5/5/6/6,
 - un 3/3/3/4/5/6/6/6,
 - au moins deux vierges pour faire des essais;
- des règles graduées ;
- des calculettes (ou plutôt, l'application calculatrice des téléphones portables...) ;

- un disque à 4 secteurs angulaires 45/135/45/135 marqués respectivement 3/4/6/5, avec un rectangle tracé par dessus et une flèche tournante fixée au centre.
- un "crayon rectangle", i.e. un pavé droit en bois/polystyrène/carton/... de mesures proportionnelles à 10/24.14/beaucoup.
- au moins 40 ballons de baudruche ;
- des feutres pour dessiner sur les ballons ou les balles de ping-pong (ou en polystyrène).

J1, O1 On obtient 2, 3 ou 4.

B1 On obtient 2, 3 ou 4 ayant respectivement pour probabilité d'apparition $1/4$, $1/2$ et $1/4$.

J2, O2 On pourra aider la personne en suggérant de faire un tableau à double entrée ou un arbre de probabilités. On pourra parler de probabilités à partir de la classe de Troisième. Avant, on utilisera le vocabulaire des chances.

Oui, puis Non. On a une chance sur 4 d'obtenir 2 ou 4 et une chance sur 2 d'obtenir 3.

J3, O3 Des polyèdres, à savoir les 5 solides réguliers de Platon : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre.

C'est l'occasion de parler de cube et de tétraèdre aux petits (ou simplement de pyramide aux tout-petits), et de rappeler ce qu'est un tétraèdre aux plus grands...

J4, O4, B2 Le dé $2/3/3/4$ a la même distribution de probabilité.

Il y aura sur la table un dé4 tétraèdre classique, un dé4 tétraèdre avec faces marquées 2, 3, 3, 4, et on pourrait imaginer un autre avec 2, 2, 3, 4 pour brouiller les pistes, ou bien un dé4 vierge pour les plus grands, pour deviner qu'il faut mettre 2, 3, 3, 4 dessus.

J5, O5 On peut obtenir 3, 4, 5 et 6.

J6, O6, B3 Non, on a :

- une chance sur 8 d'obtenir $3=1+1+1$ (probabilité $1/8$),
- une chance sur 8 d'obtenir $6=2+2+2$ (probabilité $1/8$),
- 3 chances sur 8 d'obtenir $4=2+1+1=1+2+1=1+1+2$ (probabilité $3/8$),
- 3 chances sur 8 d'obtenir $5=1+2+2=2+1+2=2+2+1$ (probabilité $3/8$).

On fait remplir un tableau avec les différents nombres et x chances sur y de les obtenir, et on peut s'aider d'un arbre de probabilités. On peut demander si cela change quelque chose de prendre des jetons de même couleur ou de couleurs différentes.

J7, O7, B4 4 ou 5

J8, O8, B5 On a à disposition au moins six gros dés8 octaèdre :

- un classique marqué 1/2/3/4/5/6/7/8,
- un 3/4/4/4/5/5/5/6,
- un 3/3/4/4/5/5/6/6,
- un 3/3/3/4/5/6/6/6,
- au moins deux vierges pour faire des essais.

Le dé 3/4/4/4/5/5/5/6 convient.

O9, B6 On utilise les dés disponibles, et on calcule les probabilités respectives.

Les probabilités sont dans l'ordre $1/6$, $1/9$, $1/8$ et $1/8$.

Il faut donc lancer le dé à 6 faces.

En effet, dans chacun des cas, on a une seule façon d'obtenir 6.

- 1 dé à 6 faces : obtenir 6, d'où $p = \frac{1}{6}$;
- 2 dés à 3 faces : obtenir 3 et 3 d'où $p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$;
- 3 jetons : obtenir 2 sur chaque jeton, d'où $p = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;
- un jeton et un dé à 4 faces : obtenir 2 sur le jeton et 4 sur le dé, d'où $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

O10, B7 Les probabilités sont dans l'ordre $1/12$, $1/36$, $1/64$, $1/81$ et $1/64$.

Il faut donc lancer le dé à 12 faces.

En effet, là encore, dans chacun des cas, on a une seule façon d'obtenir 12.

- 1 dé à 12 faces : obtenir 12, d'où $p = \frac{1}{12}$;

- 2 dés à 6 faces : obtenir 6 sur chacun des 2 dés, d'où $p = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$;

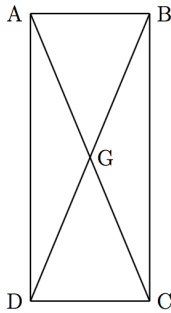
- 3 dés à 4 faces : obtenir 4 sur chacun des 3 dés, d'où $p = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$;

- 4 dés à 3 faces : obtenir 3 sur chacun des 4 dés, d'où $p = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$;

- 6 jetons : obtenir 2 sur chacun des 6 jetons, d'où $p = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

Remarque : pour le rallye des scolaires, niveau orange, on peut faire travailler les élèves en deux groupes en parallèle, l'un sur les questions 9-10, l'autre sur les 11-12-13.

O11, B8



Les angles doivent être de 45, 135, 135 et 45 degrés (ou en radians : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$). En effet,

si $\widehat{AGB}$ désigne le secteur angulaire correspondant à l'obtention de 3 et $\widehat{BGC}$ celui correspondant à l'obtention de 4, alors

$\widehat{BGC} = 3 \widehat{AGB}$ et $\widehat{AGB} + \widehat{BGC} = \widehat{AGC} = 180$,
d'où $\widehat{AGB} = 45 = \widehat{CGD}$ et $\widehat{BGC} = 135 = \widehat{DGA}$.

On pourra revoir les mesures d'un angle plat, d'un tour complet, le concept d'angles supplémentaires. On utilise la flèche qui tourne sur le rectangle marqué. On pourra discuter de la pertinence du modèle (intérêt du centre de gravité, des secteurs angulaires...). On pourra aussi faire rouler le crayon rectangle et discuter des limites du modèle.

O12, B9 22,5 ou 67,5 degrés (ou en radians : $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$).

En effet, dans le triangle isocèle GBA, on a :

$180 = \widehat{AGB} + \widehat{GBA} + \widehat{BAG} = 2 \widehat{GBA} + 45$, d'où $\widehat{GBA} = 67,5$.

De même dans le triangle isocèle BGC :

$180 = \widehat{BGC} + \widehat{GCB} + \widehat{CBG} = 2 \widehat{GCB} + 135$, d'où $\widehat{GCB} = 22,5$.

O13, B10 Dans le triangle ABD, on a : $1 + \sqrt{2} = \tan(67,5^\circ) = \frac{AD}{AB} = \frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$.

Posons $x = \tan(\frac{3\pi}{8})$. On a :

$$-1 = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(2 * \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2x}{1 - x^2},$$

d'où $x^2 - 2x - 1 = 0$ puis $x = 1 + \sqrt{2}$ puisque $x > 0$.

On pourra mesurer à la règle graduée et s'aider des calculatrices pour le calcul du quotient.

B11 Tracer un huitième de sphère, un triangle rectangle équilatéral.

La somme des angles du triangle vaut $\frac{3\pi}{2}$.

Les deux membres de l'égalité valent bien $1/8$.

On s'aidera de ballons de baudruche ou de balles de ping-pong et de feutres.

B12 Il faut $3\alpha = 2\pi$ car trois triangles se rencontrent à chaque sommet, donc $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

B13 Il faut $3\beta = 2\pi$ car trois carrés se rencontrent à chaque sommet, donc $\beta = \frac{2\pi}{3}$.

B14 Il faut $4\gamma = 2\pi$ car quatre triangles se rencontrent à chaque sommet, donc $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

B15 Il faut $\delta + 2\epsilon = 2\pi$ car un triangle et deux rectangles se rencontrent à chaque sommet, et il faut aussi

$$3\delta - \pi = 4\epsilon - 2\pi$$

car l'aire sphérique (secteur d'angle solide) d'un triangle doit être la même que celle d'un rectangle.
Donc $\delta = \frac{3\pi}{5}$ et $\epsilon = \frac{7\pi}{10}$.

B16 Un peu long, laissé en exercice au lecteur :)

