

Informations préliminaires

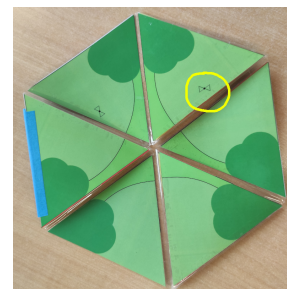
Un hexaflexagone (ou plus simplement par la suite, flexagone) est une figure en forme d'hexagone régulier, construite à partir d'un patron de triangles équilatéraux plié sur lui-même. À la différence d'un hexagone classique, les hexaflexagones n'ont pas seulement deux faces, mais cachent dans leurs plis d'autres faces, accessibles en les ouvrant par le centre.

Il est vivement conseillé de prendre en main un flexagone avant de faire l'animation. Vous pouvez en emprunter auprès de Mathilde Herblot, Matteo Ruggiero (à Sophie Germain), Frédérique Petit (à Jussieu) pour tester avant le rallye. Vous devriez apprendre :

- à les manipuler. Vous trouverez des vidéos sur internet qui expliquent manipulations, par exemple : <https://www.youtube.com/watch?v=wb8aTHDG6Tk> (C'est beaucoup plus clair qu'une explication à l'écrit !) Le mode de manipulation est le même pour tous les flexagones.
- si possible : à replier et à scotcher leur patron pour les refaire s'ils ont été ouverts. (Voir à ce sujet la solution de la question 2 et la fin de cette fiche pour les trucs et astuces).

On fait manipuler plusieurs flexagones différents lors de l'activité. Pour pouvoir les différencier et les identifier facilement, ils ont tous de petits symboles dessinés discrètement sur chaque face, qui représentent leur *graphe* (défini plus loin). C'est ce symbole qu'on a entouré en jaune sur la photo ci-contre.

On leur a aussi donné des noms. Voici un tableau récapitulatif, qui indique aussi quelle nouvelle couleur a été ajoutée pour passer d'un flexagone à n faces à un à $n + 1$ faces :

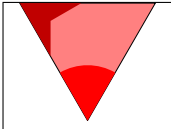
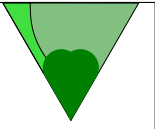
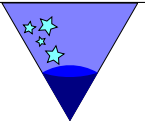
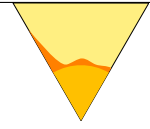
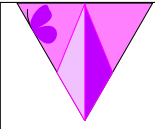
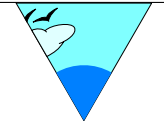


nom	symbole	nombre de faces	nouvelle couleur
classique		3	rouge, vert, bleu
papillon		4	+ jaune
souris		5	+ fuschia
trépied		6	+ cyan
vague		6	+ cyan
arc		6	+ cyan
fauteuil		6	+ cyan
éclair		6	+ cyan

Important. Les participant·es peuvent repartir avec des flexagones en papier qu'ils auront fabriqués, mais en aucun cas avec les flexagones en couleur plastifiés mis à disposition sur le stand !

Important. Les flexagones ont été fabriqués en assemblant ensemble des triangles avec du scotch transparent de manière à obtenir un patron de flexagone. Ensuite, ce patron a été plié et ses deux extrémités collées ensemble avec un scotch opaque (bleu, parfois blanc). Vous pouvez enlever un scotch opaque pour ouvrir le patron, voire le couper, **mais jamais couper les scotchs transparents !!**

Remarque. Les différentes faces des flexagones sont identifiées par des couleurs différentes. Si vous êtes daltonien, ça sera peut-être moins facile pour vous de les distinguer au premier coup d'oeil, et de même pour vos participants daltoniens. Mais cela reste possible car, en plus des couleurs, il y a aussi un petit dessin spécifique qui code la face pour que l'activité ne nécessite pas de bien voir les couleurs.

					
rouge	vert	bleu	jaune	fuschia	cyan

Solutions des fiches et suggestions d'animation

Commencez par montrer un grand flexagone (c'est un **papillon**, à 4 faces) à faces monochromatiques, une face devant, une face derrière, puis manipulez-le pour faire apparaître les faces initialement cachées : une troisième face, puis une quatrième.

Prenez ensuite un flexagone **classique** (à trois faces), et ouvrez-le devant vos participant·es en ôtant son scotch bleu afin de montrer son patron. Distribuez-en ensuite à chacun·e. Apprenez à tout le monde à le manipuler.

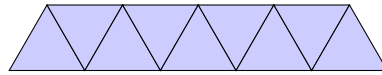
Activité. On tient un flexagone avec une face hexagonale bien visible vers le haut. On regarde les arêtes du centre à un des sommets de l'hexagone (on va les appeler *rayons*). On va plier le long de ces rayons de manière à en placer un sur deux vers le haut, et l'autre sur deux vers le bas : ces derniers vont donc se rejoindre au centre d'une figure qui ressemble à trois triangles qui ont un côté en commun. Remarquer qu'il y a deux choix différents possibles pour faire cela, selon les trois rayons sur 6 qu'on garde vers le haut.

Une fois cette opération faite, on essaie d'ouvrir le centre, en essayant de reformer un hexagone. Parfois c'est possible, parfois non ! Selon le type de flexagone et selon la face choisie, certaines peuvent s'ouvrir selon les deux choix possibles, d'autres faces ne peuvent s'ouvrir que pour l'un des deux choix (sur l'exemple ci-dessous, le deuxième choix permet une ouverture et de changer de face, pas le premier).



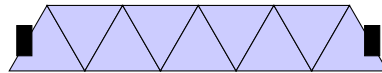
Le flexagone classique a 3 faces différentes.

J1,O1,B1 Le patron a cette forme (les couleurs ne sont pas reproduites ici) :



Il est constitué de 9 triangles équilatéraux. Pour le replier, une façon simple de procéder est de choisir une couleur, par exemple le vert, et de « cacher » tous les triangles de cette couleur en pliant le long des arêtes entre deux triangles verts. Il faut le faire trois fois (penser à regarder aussi dessous). On appellera dans la suite une telle opération « écraser le vert ». On obtient un bel hexagone monochrome.

Il reste à le refermer, ce qui présente encore une petite difficulté. Sur le patron initial, on devine bien quels cotés de quels triangles devront être scotchés ensemble :

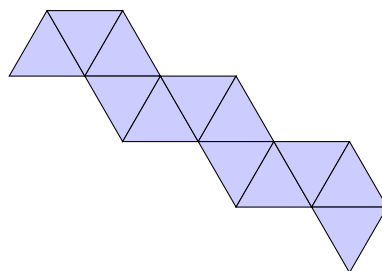


Il s'agit de les retrouver sur notre hexagone (attention, ils peuvent être un peu cachés à l'intérieur). Soit on redéplie un peu pour bien voir quels sont les triangles du bout, soit on met un bout de scotch aux extrémités du patron avant de le plier pour voir directement quels sont les deux triangles à scotcher entre eux.

Activité fiche jaune On conseille de garder un modèle coloré sous les yeux pour réussir à plier son patron blanc. Pour les plus jeunes, donnez un patron déjà découpé (pour ne pas perdre de temps à ce découpage). Pour les plus grands, vous pouvez les laisser découper eux-mêmes le patron.

J2,O2,B2 Chaque face hexagonale est constituée de 6 triangles, et il y a 4 faces. Mais chaque triangle visible sur le patron a lui-même 2 faces (recto et verso). Il faut donc $\frac{6 \times 4}{2} = 12$ triangles. Plus généralement, pour un flexagone à $n \geq 3$ faces il faut $\frac{6 \times n}{2} = 3n$ triangles. (Que ces nombres de triangles suffisent et qu'il soit toujours possible de fabriquer un flexagone à n faces n'est pas évident du tout.)

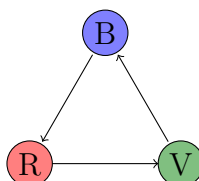
J3,O3,B3 C'est celui du milieu, celui qui a la forme suivante.



J4,O4,B4 On peut procéder comme à la question 2, en écrasant la face de la nouvelle couleur (jaune). On retombe alors sur le patron de l'hexagone classique, que l'on a déjà appris à replier.

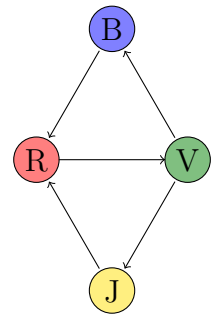
Activité fiche jaune Comme précédemment, montrez en exemple un patron aux faces déjà coloriées pour aider au pliage, sinon c'est très difficile.

O5,B5 Le graphe obtenu est circulaire (R=rouge, V=vert, B=bleu) :



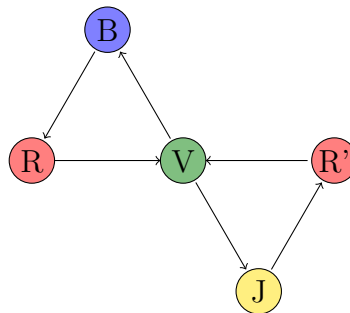
O6,B6 On obtient le graphe ci-contre (J=jaune).

À partir de la face verte, on peut passer à la face bleue ou à la face jaune (les deux façons de le manipuler fonctionnent).



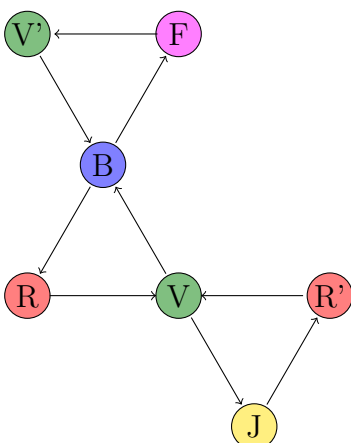
O7,B7 On peut aussi arriver au rouge de deux façons différentes, à partir de la face bleue ou de la jaune. On peut remarquer que la face rouge obtenue n'est pas exactement la même dans les deux cas ! Dans un cas, on voit un disque au milieu, dans l'autre cas la face rouge n'a aucun dessin au milieu. Les triangles rouges ne sont pas orientés de la même façon dans ces deux cas.

Cela suggère de considérer ces deux faces rouges comme différentes, et en notant l'une d'elle R' on obtient le graphe suivant :



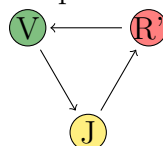
Attention : il est possible que des participant·es n'aient pas exactement ce graphe. On a deux façons de tenir son flexagone, avec une face au-dessus visible et une face en-dessous cachée. On pourrait le retourner. Le graphe obtenu est presque le même, mais avec les flèches allant dans l'autre sens. Les rôles des faces vertes et rouges peuvent donc être inversés chez des personnes qui tiendraient leur flexagone « à l'envers ». Ils auront deux faces vertes différentes, et pourront arriver à la rouge de deux manières.

O8,B8 En parcourant de manière systématique les faces pour tracer le graphe, on voit que la **souris** a 5 faces. On a ajouté une fuschia (F=fuschia).

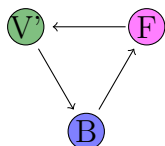


O9,B9 Pour passer du **classique** au **papillon**, on a remplacé :

la face verte  par un triangle, de la forme

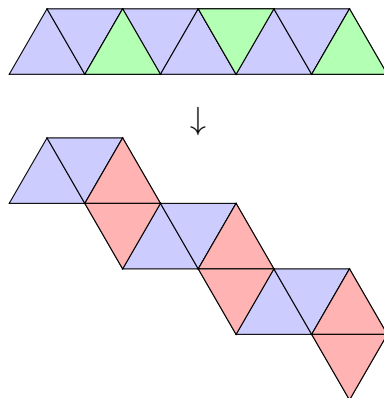


De même, pour passer du **papillon** à la **souris**, on a remplacé :

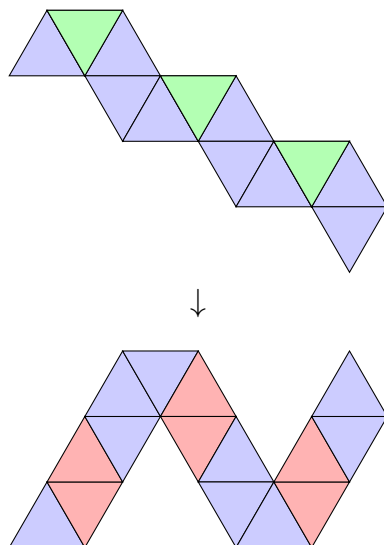


la face bleue **B** par le triangle

O10,B10 Passer du patron du **Classique** au patron du **Papillon**, on a pris les triangles dans le patron de couleur vert-rouge (ce qui sont le devant et derrière de la face bleue), donc les triangles en position 3-6-9 dans le patron (vu de gauche à droite), et on les a “doublés”, c’est-à-dire on en a fait une copie juste à côté, dans le sens opposé par rapport à la chaîne de triangles dans le patron.

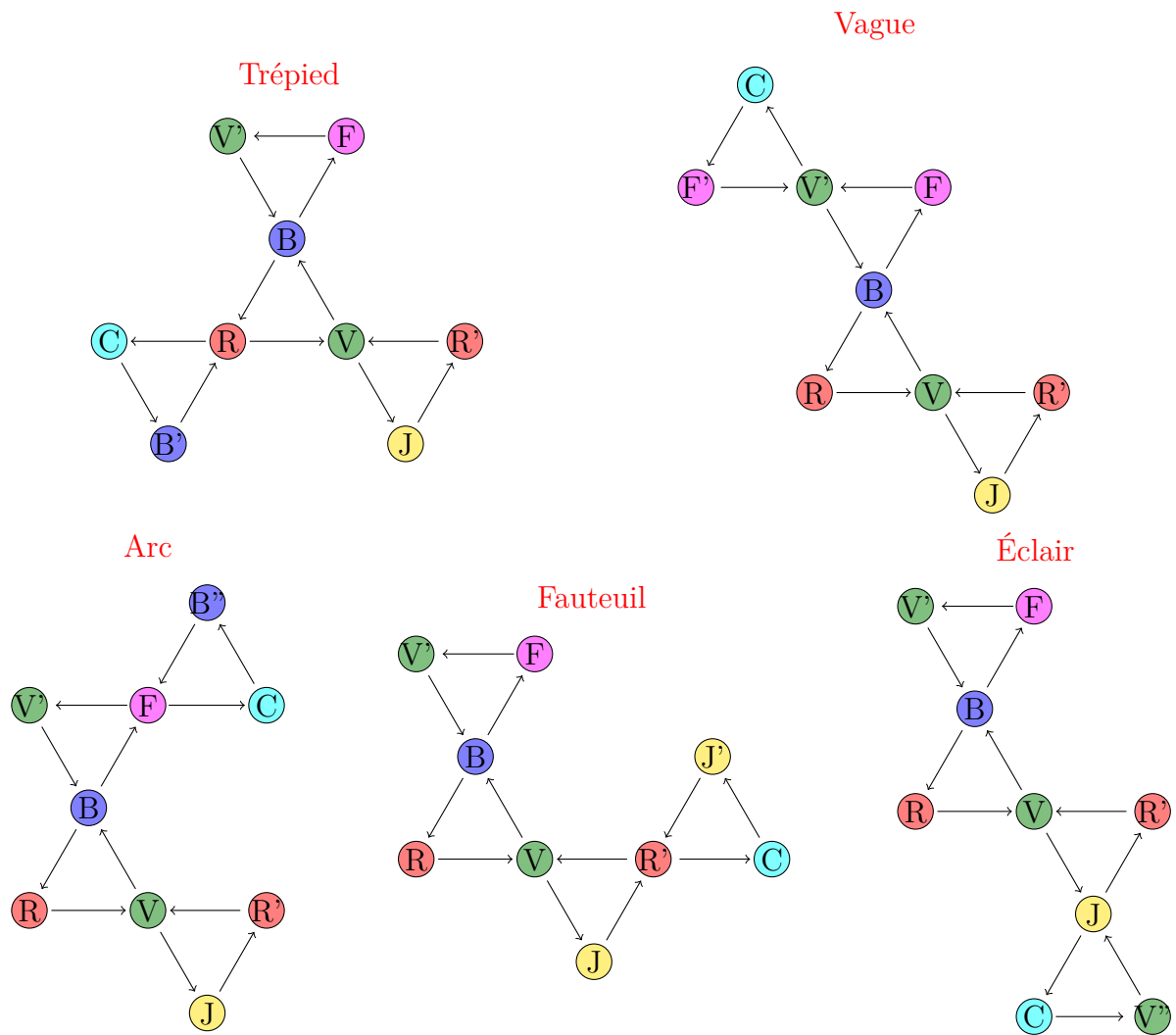


Pour passer du **Papillon** au **Souris**, on a fait la chose analogue pour les triangles de couleur bleu-vert (ce qui correspond à la face C), qui sont en position 2-6-10.

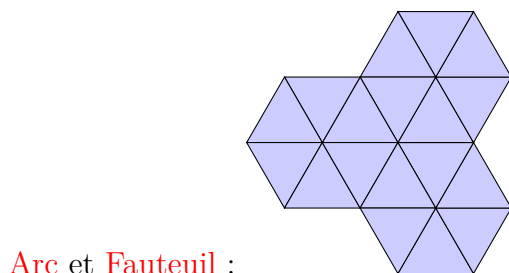
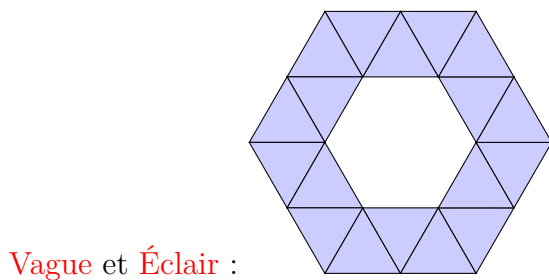
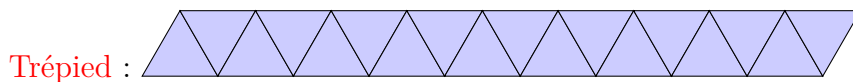


Activité, fiche orange

B11 Chaque flexagone a le même nombre de faces : 6. Pour les graphes, on a :



B12 Comme patrons, on obtient :



Arc et Fauteuil :

Pour les graphes, on veut déterminer quels graphes sont équivalents, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'un à l'autre juste en donnant un nom différent aux sommets (c'est-à-dire aux faces du flexagone). Alors on remarque que :

- Les graphes de l'**Arc** et du **Fauteuil** sont équivalents : il suffit d'effectuer une rotation de 60 degrés pour passer de l'un à l'autre, puis de renommer toutes les faces différemment. En particulier, la séquence $J \rightarrow R \rightarrow V \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C$ de l'**Arc** devient $C \rightarrow D \rightarrow R \rightarrow V \rightarrow B \rightarrow F$ dans **Fauteuil**.
- Les graphes de **Vague** et **Éclair** se ressemblent, mais ils ne sont pas équivalents. On peut le voir par exemple du fait que dans l'**Éclair** on trouve 3 fois la face verte, mais dans **Vague** toute couleur apparaît au plus 2 fois. En revanche, on peut obtenir un graphe de l'autre en faisant une réflexion par rapport à une droite. Cette opération, qu'on va appeler "dualité", correspond à tourner le flexagone pour l'utiliser avec les faces arrière.

Au niveau des patrons, on remarque que deux flexagones équivalents ont les mêmes patrons (les patrons sont définis quitte à décider où on commence le patron dans la chaîne de triangles).

Dans ce cadre, la dualité correspond à parcourir le patron en sens inverse.

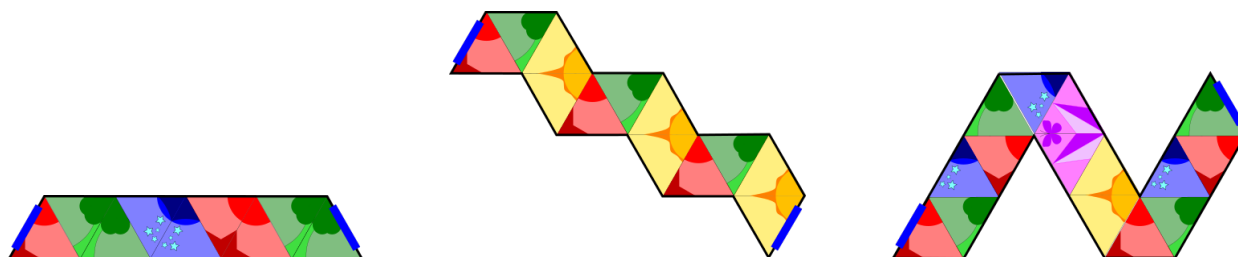
Une question naturelle qui peut se poser est : est-ce que deux patrons équivalents forment toujours deux flexagones équivalents ou duaux ? La réponse est non, on peut trouver des exemples de flexagones à 7 faces, avec même patron mais pas équivalents ni duaux.

Commentaires supplémentaires

Quelques astuces pour replier les patrons

Pour replier facilement un patron ouvert : commencez par écraser la dernière couleur ajoutée (par complexité du modèle), en repliant 2 par 2, face contre face, les triangles de cette couleur. Écrasez d'abord le **cyan**, puis le **fuschia**, puis le **jaune**. Chaque écrasement de couleur se fait en 3 plis. Vous obtenez alors le patron du flexagone classique, vous pouvez écraser la couleur de votre choix **bleu**, **vert** ou **rouge** pour former l'hexagone.

Pour savoir comment scotcher les triangles à la fin, on vous recommande vivement de les avoir repérés (par un petit morceau de scotch) comme expliqué à la question 2. Si même sur le patron, il ne vous semble pas évident de voir où placer le scotch (certes, quels triangles aux extrémités est une chose évidente, mais on peut hésiter entre deux de leurs côtés), imaginez que vous prolongez périodiquement la suite des triangles. Voici quelques exemples :



Attention en mettant ce scotch final : vous devrez en mettre deux, un dessus et un dessous, et bien de la même taille et superposés l'un à l'autre. Sinon, il restera un petit bout collant quelque part, et cela peut bloquer les manipulations. . .

Pourquoi savoir replier les patrons ?

Il est possible que lors de l'activité quelqu'un fasse une manipulation « sauvage » non autorisée du flexagone et vous tende un hexagone avec une face multicolore. En ce cas, il sera probablement plus simple de défaire le scotch opaque (bleu ou blanc) et de replier le flexagone, que d'essayer de retrouver la manipulation sauvage inverse. . .