

Les nombres figurés

Niveau jaune (J) jusqu'à 10 ans environ, ou école primaire

Niveau orange (O) collège, lycée, grand public

Niveau bleu (B) expert-e ayant fait des mathématiques dans le supérieur

Vous disposez de matériel pour les niveaux jaune et orange :

- une pochette grise opaque avec des jetons portant des numéros allant de 2 à 50 dans laquelle les enfants piocheront un nombre au hasard ;
- une boîte contenant des jetons portant des numéros allant de 51 à 99 ou 1, le numéro est masqué par une gommette sur un côté (sauf le 1 dont les deux faces sont masquées pour éviter le problème du 1 qui n'est pas un nombre premier) ; ces jetons permettent de réaliser les nombres rectangulaires, carrés, triangulaires, et, éventuellement, en utilisant la face non cachée, de choisir un "grand" nombre au hasard pour le décomposer ;
- des gommettes rouges si l'une d'elles se décolle ;
- du carrelage noir carré pour réaliser les nombres rectangulaires, carrés, triangulaires ;
- deux paniers (à voir), l'un destiné à recevoir les jetons portant un nombre premier, l'autre pour les jetons portant un nombre non premier ;
- des feuilles avec des tableaux à remplir pour les questions J1, J2, J3 (niveau jaune).

J1, J2, J3, O1, O2, O3 La fiche jaune est essentiellement un atelier sur la notion de nombre premier.

Demander aux enfants de construire les rectangles, carrés, triangles possibles pour chacun des entiers allant de 2 à 9. Ceux qui savent lire peuvent remplir le tableau fourni (feuilles A5).

On pourra montrer qu'un nombre peut se mettre éventuellement sous la forme de plusieurs rectangles afin de mettre en évidence la commutativité de la multiplication (on ne prononcera pas ce mot avec les plus jeunes, mais on notera que par exemple que 6 s'écrit avec 2 lignes et 3 colonnes, ou avec 3 lignes et 2 colonnes, et que $2.3 = 3.2$). Et tous les nombres peuvent se mettre sous forme de rectangle à une seule ligne ou une seule colonne !

B1 Les nombres premiers et 1.

B1 Les carrés parfaits.

J4, J5 L'enfant pioche un jeton dans la pochette opaque, il prend autant de jetons à face rouge ou de carrés noirs et essaie de réaliser avec un "rectangle" ayant au moins deux lignes et deux colonnes. Il met le jeton dans le panier des nombres premiers ou pas suivant le cas. Il recommence autant de fois qu'il le souhaite. On peut laisser les jetons dans les différents paniers d'un enfant à l'autre pour avoir un panel plus important de nombres premiers ou non. Pour les plus grands, on peut choisir au hasard un jeton dans la boîte et décomposer le nombre qui est sur la face non cachée.

C'est l'occasion ici de dire, si l'enfant ne connaît pas cette notion, que tous les nombres mis dans le panier de ceux que l'on ne peut décomposer que sur une seule ligne ou une seule colonne sont des nombres premiers (on a enlevé le 1 pour éviter le fait que 1 n'est pas premier bien qu'il ne se décompose que sur une ligne et une seule colonne!).

J6 On peut faire compléter le triangle petit à petit (comme le suggèrent les dessins avec des lignes de couleurs différentes sur la fiche de questions) pour aider l'enfant à construire les nombres triangulaires les uns après les autres.

J7, O12 Si vous êtes 4, vous pourrez aider l'enfant en lui demandant combien de poignées de mains doit faire la première personne – 3, donc il pose 3 jetons en ligne – puis combien de poignées pour la deuxième personne – il lui reste 2 poignées de mains, donc l'enfant pose deux jetons en ligne au-dessus de la ligne précédente – puis la dernière personne, une seule poignée donc on pose le dernier jeton au-dessus des lignes précédentes. Et on compte les jetons. Pour le niveau orange, ils devraient voir facilement le lien avec les nombres triangulaires.

O4, B3 On constate que :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2}{2} & N_2 &= 36 = 6^2 = \frac{8 \cdot 9}{2}; \\ N_3 &= 1225 = 35^2 = \frac{49 \cdot 50}{2} & N_4 &= 41616 = 204^2 = \frac{288 \cdot 289}{2}. \end{aligned}$$

Pour le niveau orange, on peut se contenter des deux premiers exemples puisqu'il s'agit de montrer l'existence de tels nombres (et que le premier est un peu trivial).

Pour le niveau bleu, on peut tout de même se demander s'il y en a d'autres, c'est-à-dire s'il existe des entiers n et c tels que $c^2 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Pour cela, on pourra suggérer de poser $x = 2n + 1$ et $y = 2c$ afin de s'apercevoir que x et y satisfont à l'équation diophantienne du second ordre (dite de Pell)

$$(*) \quad x^2 - 2y^2 = 1,$$

puis proposer de vérifier que, pour tout entier k , on peut définir des entiers x_k et y_k par l'égalité

$$x_k + \sqrt{2}y_k = (1 + \sqrt{2})^{2k}$$

qui vérifient l'équation (*). En effet, on a $x_k - \sqrt{2}y_k = (1 - \sqrt{2})^{2k}$, d'où

$$x_k^2 - 2y_k^2 = (x_k + \sqrt{2}y_k) \cdot (x_k - \sqrt{2}y_k) = (1 + \sqrt{2})^{2k} \cdot (1 - \sqrt{2})^{2k} = (-1)^{2k} = 1.$$

On en déduit

$$y_k = \frac{(1 + \sqrt{2})^{2k} - (1 - \sqrt{2})^{2k}}{2\sqrt{2}},$$

puis

$$N_k = \left(\frac{y_k}{2}\right)^2 = \left(\frac{(1 + \sqrt{2})^{2k} - (1 - \sqrt{2})^{2k}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\left((1 + \sqrt{2})^{2k} - (1 - \sqrt{2})^{2k}\right)^2}{32}.$$

Cela montre l'existence d'une infinité de nombres triangulaires carrés. En fait, les couples (x_k, y_k) sont toutes les solutions de l'équation (*) qui se résout dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

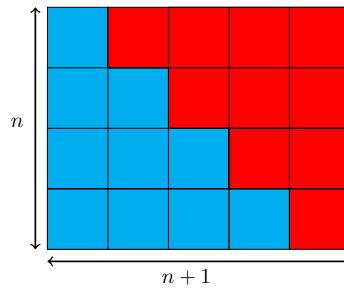
O5, B4 On note T_k le k -ième nombre triangulaire. On a :

$$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10.$$

O6 $T_{35} = 1 + 2 + 3 + \dots + 34 + 35 = 630$.

On commence à voir l'utilité d'avoir une méthode générale...

O7, B5 On utilise deux représentations du même nombre triangulaire (ici l'une en bleu, l'autre en rouge) pour obtenir un rectangle dont on sait calculer le nombre de carrés qui le composent



$$\text{d'où : } T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

B6 Le nombre triangulaire $T_n = \frac{n(n+1)}{2} = p$ avec p premier implique que p divise n ou $n+1$, donc :

$n = kp$ (puis $k(n+1) = 2$ d'où $(k, n) = (2, 0)$ ou $(k, n) = (1, 1)$, pas de solution) ;

ou $n+1 = kp$ puis $kn = 2$ d'où $(k, n) = (2, 1)$ ou $(k, n) = (1, 2)$, qui donne $p = 3 = T_2$.

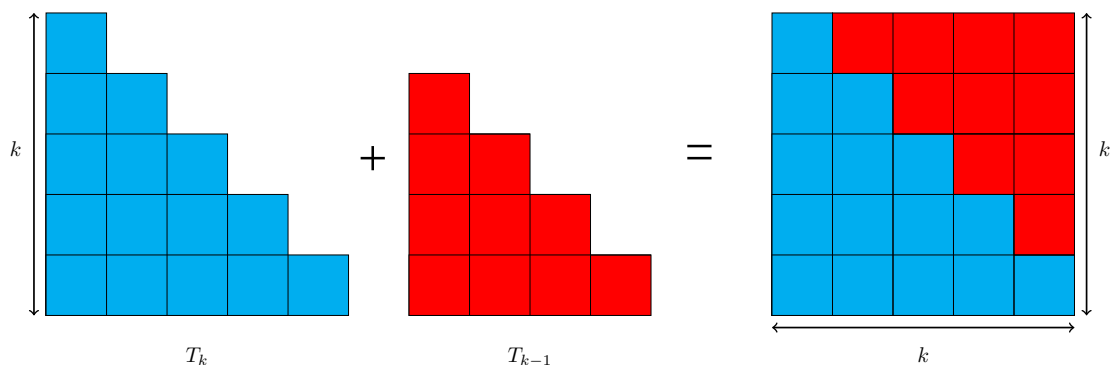
Il s'ensuit que $T_2 = 3$ est le seul nombre premier triangulaire.

Un niveau jaune ou orange qui a bien compris ce que sont les nombres premiers et les nombres triangulaires pourrait remarquer que 3 est un nombre triangulaire premier.

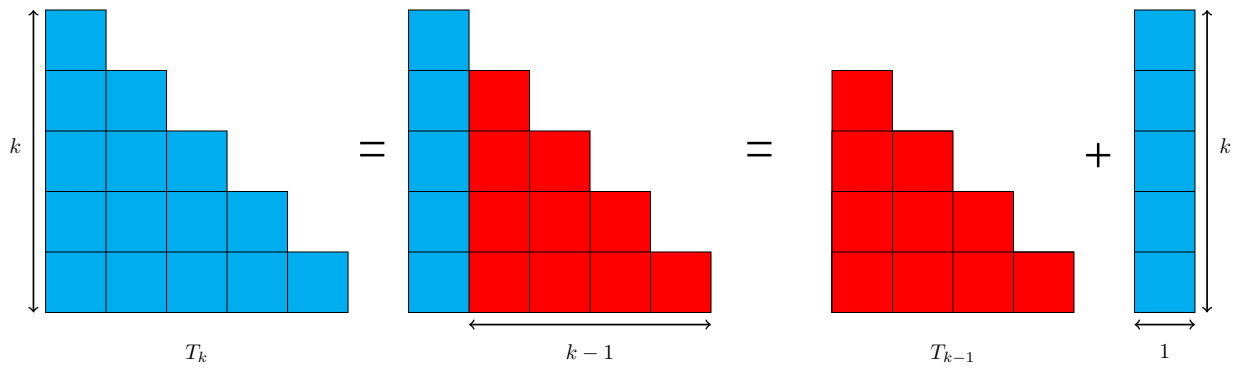
O8, O9 Ici aussi, on demande des preuves géométriques.

Pour $k \geq 2$, on a : $T_k + T_{k-1} = k^2$.

En effet :

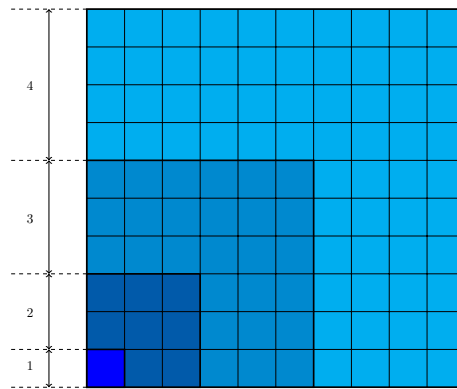


Par ailleurs,

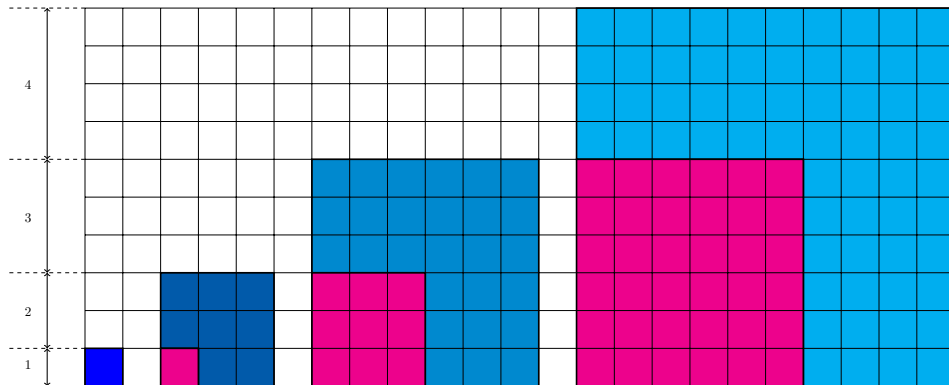


D'où : $T_k = T_{k-1} + k$.

O10 Le membre de gauche de l'égalité cherchée est égal à l'aire du grand carré de la figure, à savoir $(T_4)^2$



aire qui est la somme des aires A_1, A_2, A_3, A_4 des 4 figures bleues qui la composent



Or $A_1 = 1 = 1^3$ et les aires A_2, A_3, A_4 se calculent comme la différence des aires des carrés bleus et des carrés rouges. Mais toutes les aires de ces carrés sont égales aux carrés de nombres triangulaires :

$$A_2 = (T_2)^2 - (T_1)^2 = (T_2 - T_1) \cdot (T_2 + T_1) = 2 \cdot 2^2 = 2^3$$

$$A_3 = (T_3)^2 - (T_2)^2 = (T_3 - T_2) \cdot (T_3 + T_2) = 3 \cdot 3^2 = 3^3$$

$$A_4 = (T_4)^2 - (T_3)^2 = (T_4 - T_3) \cdot (T_4 + T_3) = 4 \cdot 4^2 = 4^3$$

si on utilise les questions précédentes [O8] et [O9].

On en déduit :

$$(T_4)^2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

O11, B7 D'après les questions [O8] et [O9], en posant $T_0 = 0$ de sorte que les deux égalités qui y sont montrées le sont aussi pour $k = 1$, on a pour tout $k \geq 1$:

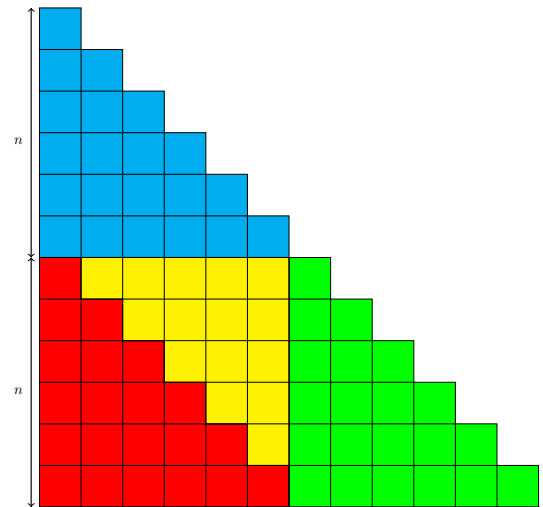
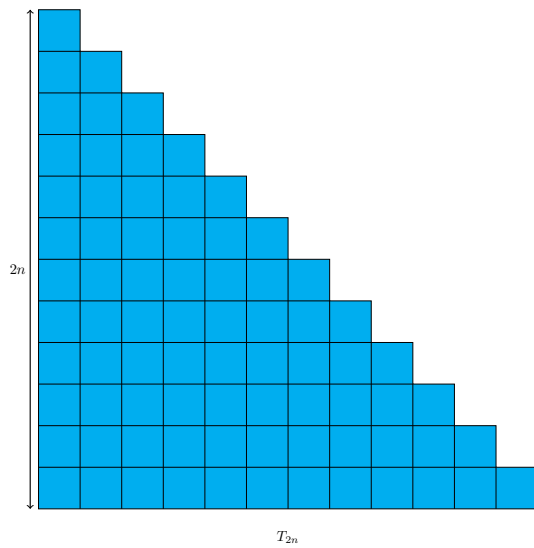
$$k^3 = k^2 \cdot k = (T_k + T_{k-1}) \cdot (T_k - T_{k-1}) = (T_k)^2 - (T_{k-1})^2.$$

D'où, en sommant sur k :

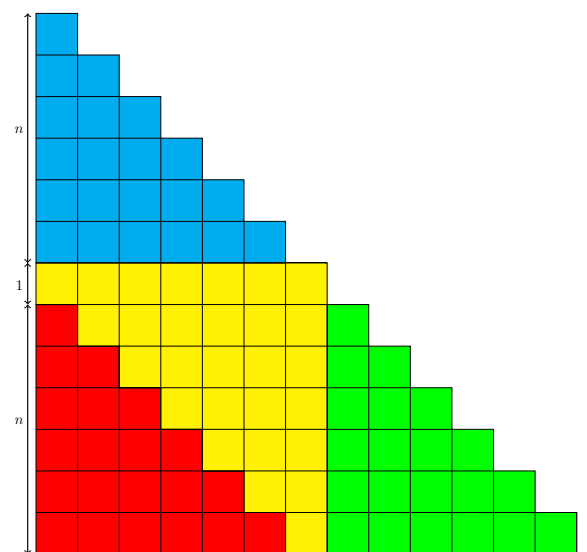
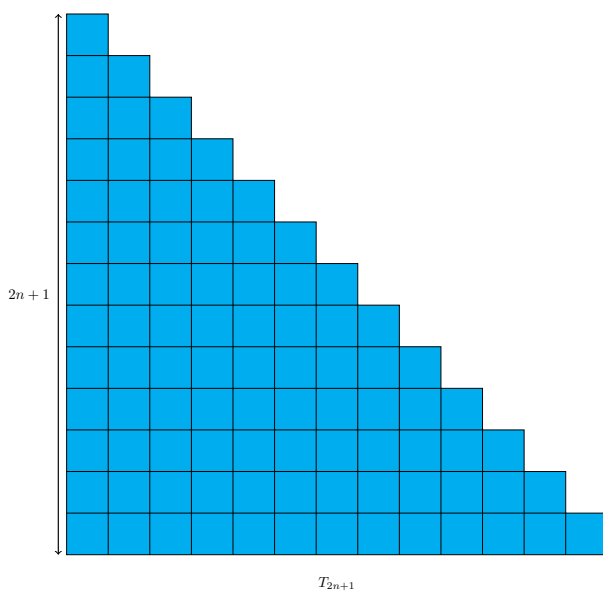
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n [(T_k)^2 - (T_{k-1})^2] = (T_n)^2 - (T_0)^2 = (T_n)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

B8 C'est évident en faisant des dessins suivant la parité de k .

Cas pair



Cas impair



B9 Question difficile sans aide. Elle repose sur le théorème des trois carrés :

« tout entier congru à 3 modulo 8 est somme de trois carrés. »

Soit N un entier. On pose $n = 8N + 3$. Alors n est congru à 3 modulo 8. Il s'écrit donc comme la somme de trois carrés d'entiers qui sont nécessairement impairs.

Pour cela, on regarde la congruence modulo 4 de $n = x^2 + y^2 + z^2$ suivant la parité de x, y, z .

x	y	z	$x^2 + y^2 + z^2$	modulo 4, $x^2 + y^2 + z^2$ est congru à
$2a$	$2b$	$2c$	$4(a^2 + b^2 + c^2)$	0
$2a$	$2b$	$2c + 1$	$4(a^2 + b^2 + c^2 + c) + 1$	1
$2a$	$2b + 1$	$2c + 1$	$4(a^2 + b^2 + b + c^2 + c) + 2$	2

Or $8N + 3 \equiv 3 \pmod{4}$, de sorte que les entiers x, y et z sont forcément impairs.

Il existe donc des entiers a, b, c (éventuellement nuls) tels que $x = 2a + 1, y = 2b + 1$ et $z = 2c + 1$ et l'on a :

$$8N + 3 = x^2 + y^2 + z^2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2,$$

d'où

$$8N + 3 = 8 \left(\frac{a(a + 1)}{2} + \frac{b(b + 1)}{2} + \frac{c(c + 1)}{2} \right) + 3,$$

puis

$$N = T_a + T_b + T_c.$$

Ce résultat, conjecturé par Fermat en 1638, a été démontré par Gauss le 10 juillet 1796.