

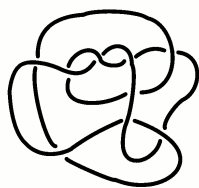
Vous avez devant vous des nœuds, obtenus chacun à l'aide d'une seule ficelle dont on a recollé les bouts. Vous pourrez les manipuler et les déformer en bougeant les ficelles, mais sans jamais couper la ficelle.

On peut aussi les représenter sur une feuille, en indiquant un brin qui passe sous un autre en laissant de petits blancs.

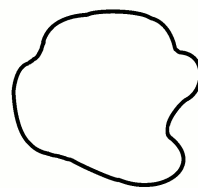


Ce schéma signifie que le brin bleu passe en-dessous du brin rouge.

1. Certains nœuds peuvent être trompeurs. Prenez un nœud sur la table. Pouvez-vous le manipuler pour le dénouer totalement et obtenir le « nœud trivial » ?



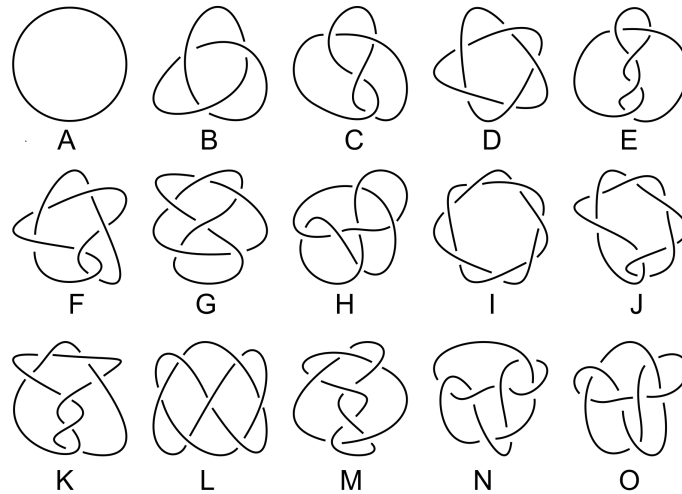
un exemple de
nœud à dénouer



nœud trivial

2. Y avait-il des croisements sur votre nœud au départ ? Et à la fin ?

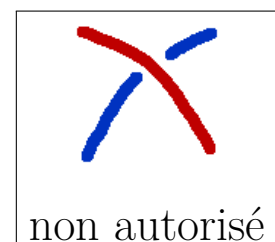
Voici un catalogue de nœuds, bien démêlés, c'est-à-dire dessinés avec le moins de croisements possibles.



3. Prenez un nœud dans le sac. Pouvez-vous reconnaître de quel nœud il s'agit sur le catalogue ?
4. Le nœud B s'appelle le nœud de trèfle. Pensez-vous qu'on puisse le manipuler pour le dénouer et obtenir le nœud trivial ?

On regarde le dessin d'un nœud et on essaie de colorier ses traits avec 3 couleurs différentes, en respectant ces règles :

- quand un trait passe au-dessus d'un croisement, on n'a pas le droit de changer sa couleur
- quand un trait passe au-dessous d'un croisement, on peut changer ou non sa couleur
- au niveau de chaque croisement, soit on a les trois couleurs, soit seulement une.



Si on peut le faire en utilisant bien les trois couleurs, on dit que notre dessin est tricoloriable. Sinon, il ne l'est pas.

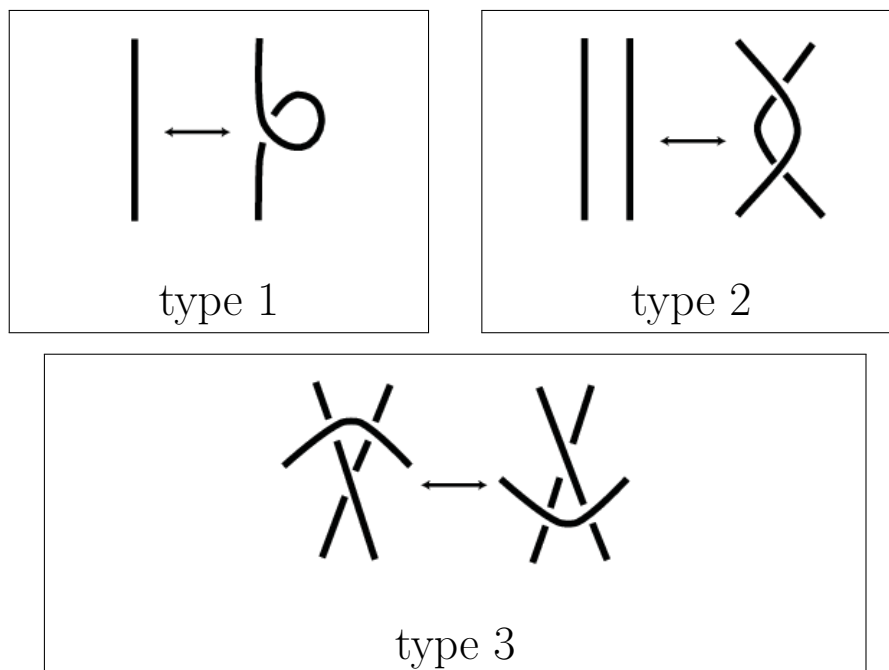
5. Parmi les dessins de nœuds suivants, lesquels sont tricoloriables ?



6. Pourquoi on ne peut jamais colorier un dessin d'un nœud (quelconque) avec exactement 2 couleurs ?

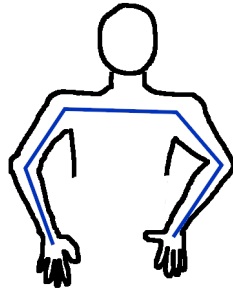
Nous allons démontrer que le fait d'être tricoloriable ou non ne change pas quand on déforme un nœud : si une configuration d'un nœud est tricoloriable, alors toutes ses configurations le sont.

Voici les trois types de manipulations élémentaires que l'on peut faire sur un nœud.



7. Montrez que pour les trois types de transformations, si un dessin avait au moins 2 couleurs avant transformation, on peut encore le colorier avec au moins 2 couleurs après transformation. Concluez.

8. Nous pouvons ainsi démontrer que le nœud de trèfle n'est effectivement pas le même que le nœud trivial, voyez-vous comment ?
9. Défi n° 1 : arrivez-vous à réaliser le nœud de trèfle dans l'espace en utilisant non pas une ficelle ou une corde, mais 6 bâtons rigides ?
10. Défi n° 2 : Regardons vos deux avant-bras, vos deux bras comme des bâtons, votre torse reliant vos deux bras en un cinquième bâton, comme sur le dessin ci-dessous.



Pouvez-vous, en prenant entre vos mains un sixième vrai bâton (et sans vous blesser), réaliser un nœud de trèfle ?