

Niveau jaune (J) jusqu'à 10 ans environ, ou école primaire

Niveau orange (O) collège, lycée, grand public

Niveau bleu (B) expert·e ayant fait des mathématiques dans le supérieur

Ce stand est très inspiré d'activités préparées par Léa Dusollier, Thibault Godin et Hoel Queffelec, disponibles sur le site <https://kits.math.cnrs.fr/> et également publiées dans le numéro spécial *Ateliers clefs en main* de la Gazette en juillet 2024.

J1,J2,O1,B1 Sur le dessin ce n'est pas forcément simple, mais en pratique secouer un peu la ficelle devrait permettre de voir que le nœud est trivial. Pensez à emmêler à nouveau le nœud pour les personnes suivantes.

J3,O2,B2 Il y avait des croisements au début, plus à la fin, alors que le nœud est le même. Le nombre de croisements n'est pas un invariant du nœud.

J4,O3,B3 Cette question permet de manipuler des nœuds, de se rendre compte qu'un même nœud peut se présenter de plusieurs façons. Pour les reconnaître, essayer d'avoir le moins de croisements possibles, et séparer le plus possible les différents croisements les uns des autres. Certains sont très simples, et les participant·es qui les ont eus peuvent en piocher un autre, d'autres plus difficiles à identifier.

Pour les plus jeunes, utiliser le sac avec les nœuds jaunes qui contient uniquement des nœuds pas trop difficiles à identifier.

Si besoin, un code couleur vous permettra d'identifier les différents nœuds (voir annexe).

Après cette étape, il faut emmêler un peu les nœuds avant de les ranger dans le sac, pour les suivantes !

O4,B4 Le nœud de trèfle semble non trivial.

J5,O5,B5 Le nœud A n'est bien sûr pas tricoloriable, et le nœud B l'est.



Expliquons pourquoi le nœud J n'est pas tricoloriable.

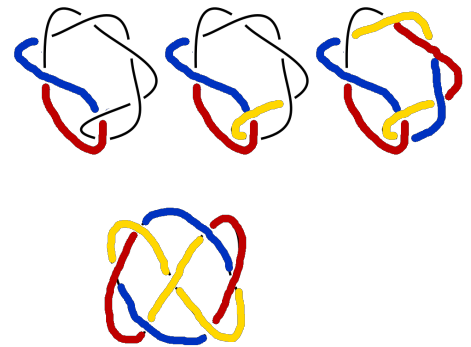
Commençons par colorier un trait d'une couleur, par exemple celui-ci en bleu. Ensuite, dans le bas de la figure ce trait passe sous un autre, ou a le choix de garder la même couleur ou d'en prendre une autre.



Si on choisit de garder la même couleur, on obtient le coloriage ci-contre, puis les deux traits en pointillés doivent aussi être coloriés en bleu, et ensuite tout le nœud est colorié en bleu.



Si on choisit de changer de couleur, cela impose ensuite les couleurs suivantes pour respecter la présence des trois couleurs dès qu'il y en a deux à une intersection, et le dernier trait n'est coloriable d'aucune couleur.

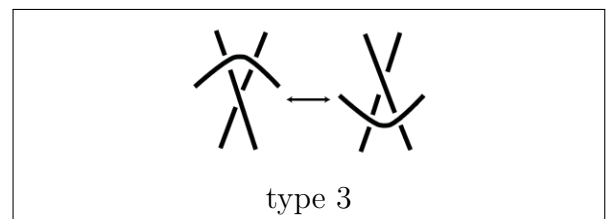
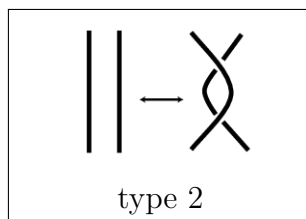
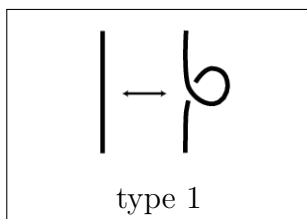


Le nœud L est tricoloriable, par exemple comme cela :

O6,B6 S'il y a deux couleurs, ce changement de couleur se fait nécessairement au niveau d'un croisement et la règle de coloriage impose alors la présence d'une troisième couleur. Il est donc impossible que le dessin d'un nœud soit colorié avec exactement deux couleurs.

O7,B7 Les transformations présentées s'appellent les transformations de Reidemeister.

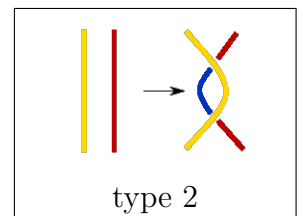
On va montrer que si le dessin d'un nœud est colorié avec au moins 2 couleurs, alors après avoir effectué une transformation de Reidemeister (localement), on peut toujours colorier le nouveau dessin du nœud avec 2 couleurs.



Si on effectue une transformation de type 1, le brin sur lequel on fait la transformation est toujours d'une seule couleur. La transformation ne change rien au coloriage.

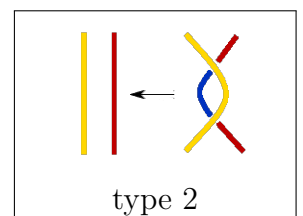
Si on effectue une transformation de type 2 dans le sens $\rightarrow$

- soit on avait les deux brins de la même couleur, auquel cas on peut faire la même chose après transformation,
- soit les deux brins étaient de deux couleurs différentes, et dans les deux cas on peut colorier après transformation en gardant les mêmes contraintes sur le reste du nœud (c'est-à-dire les mêmes couleurs en haut et en bas) qu'avant transformation.



Si on effectue une transformation de type 2 dans le sens $\leftarrow$ c'est la même chose

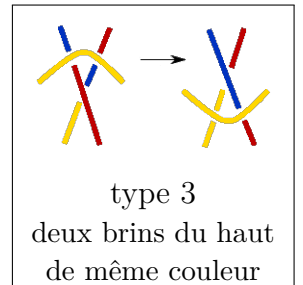
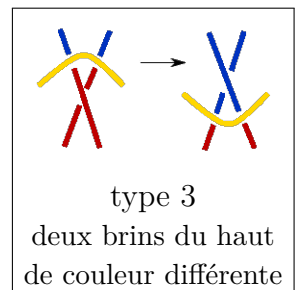
- soit on avait une seule couleur au début, auquel cas on peut faire la même chose après transformation,
- soit on avait deux couleurs différentes, et la seule possibilité (à l'ordre près des couleurs) est celle ci-contre, qui permet bien de respecter les mêmes contraintes après transformation.



Par symétrie, la question est la même que l'on effectue une transformation de type 3 vers la gauche ou vers la droite. Si tous les brins étaient de la même couleur, alors on peut faire la même chose après transformation. On suppose qu'au moins deux couleurs sont utilisées (localement).

Si on effectue une transformation de type 3 dans le sens $\rightarrow$

- Si les deux brins du haut avaient la même couleur, alors le brin horizontal qui les croise doit avoir une autre couleur, et le reste des couleurs est contraint. On peut colorier le dessin après transformation en gardant les mêmes contraintes (c'est clair par symétrie entre les deux situations).
- Si les deux brins du haut n'ont pas la même couleur, on n'a plus le choix pour le reste du coloriage. On peut garder après transformation un coloriage qui impose les mêmes contraintes sur le reste du nœud.

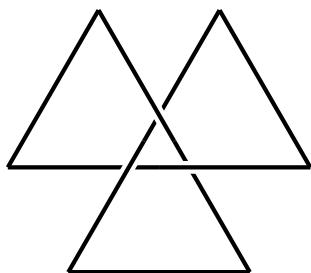


On peut en déduire que le fait de pouvoir ou non colorier un dessin de nœud avec au moins de couleurs ne dépend pas des transformations effectuées, donc ne dépend que du nœud (et pas de son dessin, de la façon dont on peut le déformer). Comme un nœud qu'on peut colorier avec au moins 2 couleurs est en fait tricoloriable (d'après la question précédente [O6,B6]), la tricoloriabilité ne dépend que du nœud et pas d'un de ses dessins. On dit que c'est un *invariant de nœud*.

O8,B8 Le nœud de trèfle est non trivial, puisqu'il est tricoloriable alors que le nœud trivial ne l'est pas.

J6,O9,B9 Il faut se mettre à plusieurs (au moins 3 personnes) et collaborer pour pouvoir placer et tenir les bâtons. Ce n'est pas facile ! En guise d'indice, on peut suggérer de réaliser une forme ressemblant au symbole de radioactivité.

Voici une solution en diagramme avec des segments, que l'on peut imaginer reproduire dans l'espace avec des bâtons :



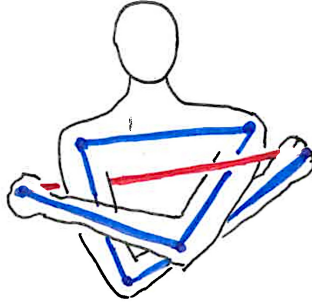
Voici la photo d'une réalisation par des membres de l'IMAG (L'Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck) :



Si on est motivé, on peut prendre une corde et la placer en suivant les bâtons de façon à vérifier qu'on a bien obtenu un nœud de trèfle.

O10,B10 Cela demande un peu d'entraînement, essayez avant ! Coincez le bâton sous un bras, placez votre deuxième bras par-dessus le premier mais sous le bâton, attrapez les extrémités (c'est un peu inconfortable mais non douloureux) et le tour est joué ! C'était sans doute incompréhensible, mieux vaut une solution en images :

En schéma :

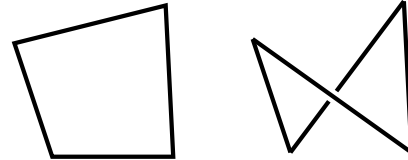


En photo :



B11 Avec 4 bâtons, on obtient un nœud dont un diagramme ne peut être que d'une des deux formes ci-contre.

Ils sont triviaux.



B12 Prenons un nœud fait de cinq bâtons, et imaginons qu'on le regarde exactement dans l'axe d'un des bâtons, de telle sorte que ce bâton nous semble réduit à un point. On fait une projection du nœud (parallèlement à cet axe), on obtient donc un diagramme de nœud fait de 4 segments, qui est trivial d'après le raisonnement de la question précédente. Donc tout nœud obtenu avec 5 bâtons est trivial.

Quelques remarques

Au-delà de son aspect ludique, l'étude de nœuds formés de bâtons trouve ses motivations en chimie et biochimie, pour l'étude de molécules, formées d'atomes et de liaisons entre eux, et dont la structure tridimensionnelle (qui peut par exemple former un nœud) influe les propriétés.

La théorie des nœuds a été beaucoup développée à cause d'une théorie de physique du XIX^e due à Kelvin, selon laquelle les atomes seraient des nœuds dans un « éther ». On espérait alors par exemple qu'une table des nœuds permettrait d'obtenir une table des éléments chimiques. C'est assez amusant qu'elle ait maintenant des applications en physique théorique et en chimie.

Pour aller plus loin, vous pouvez regarder

- Les « Kits mathématiques » utilisés pour préparer ces fiches, écrits par Léa Dusollier, Thibault Godin et Hoel Queffelec, sont accessibles ici :

Sac de nœuds

Nœuds en bâtons

Peut-on dénouer le nœud de trèfle ?

- Le livre *The knot book* de Colin Adams présente les nœuds de manière assez simple, et a un chapitre sur la représentation de nœuds avec des bâtons [1].
- La base de données KnotInfo : <https://knotinfo.math.indiana.edu/index.php> avec tout plein d'informations sur plein de nœuds !

Références

- [1] Colin C. Adams. *The knot book*. W. H. Freeman and Company, New York, 1994. An elementary introduction to the mathematical theory of knots.