

La monnaie de sa pièce

Une nouvelle monnaie mondiale est créée : le Frik. Seules deux banques ont le droit de décider quelles nouvelles pièces de Frik fabriquer pour toute la planète. Vous en dirigez une, votre concurrent M. Picsou dirige l'autre. Chaque jour, en alternance, vous décidez chacun d'une nouvelle valeur de pièce à éditer, mais vous devez respecter deux règles :

- aucun de vous n'a le droit d'émettre de pièce de 1 Frik (et il n'y a pas de centimes) ;
- aucun de vous n'a le droit d'émettre une nouvelle pièce d'une valeur que l'on pouvait déjà payer avec les pièces existant précédemment, en additionnant des pièces déjà créées (sans rendre la monnaie).

Le premier qui ne peut plus fabriquer de nouvelle pièce est déclaré perdant. L'autre a gagné.



Par exemple, si Picsou commence par éditer des pièces de 2 Frik, en les ajoutant on peut obtenir tous les nombres pairs, mais aucun nombre impair. Vous pouvez donc décider ensuite de fabriquer une pièce d'une valeur

impair, par exemple de 9 Frik. Cela interdit de fabriquer ensuite des pièces de $2+9=11$ Frik, mais aussi de $2+2+9=13$ Frik, etc.

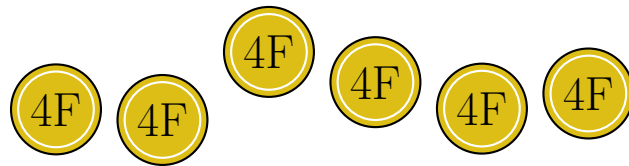
● Premiers essais ●

1. Si Picsou commence par éditer une pièce de 6 Frik, quelles nouvelles pièces pouvez-vous éditer ? Lesquelles ne pouvez-vous plus éditer ?
2. Quelle pièce devriez-vous fabriquer si Picsou fabrique des pièces de 2 Frik ?
3. Quelle pièce devriez-vous fabriquer si Picsou fabrique des pièces de 3 Frik ?

Le premier qui fabrique des pièces de 2 ou de 3 Frik risque de perdre... il est même sûr de perdre si son concurrent joue bien !

● Mauvais départs ●

Nous allons regarder le cas où Picsou commence et qu'il décide de fabriquer des pièces de 4 Frik.

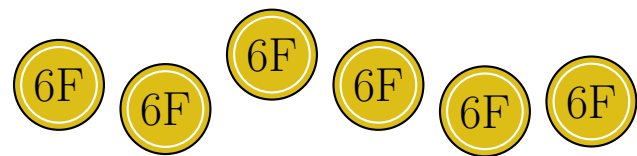


4. Vous décidez alors de fabriquer des pièces de 5 Frik. Quelles sont les seules possibilités pour Picsou ensuite ?
5. Pour chaque réponse possible de Picsou, est-il possible pour vous de trouver une bonne stratégie ?
6. Finalement, est-ce un bon choix de votre part de fabriquer des pièces de 5 Frik en réponse aux pièces de 4 Frik ?

Nouvel essai : après que Picsou a décidé de fabriquer des pièces de 4 Frik, vous fabriquez des pièces de 6 Frik. Nous allons établir une manière de gagner la partie, quoi que fasse Picsou !

7. Quels coups sont maintenant possibles pour Picsou ?
8. Si Picsou fabrique, comme troisième pièce, des pièces de 5F, expliquez comment vous allez le battre.
9. Et si Picsou fabrique plutôt, comme troisième pièce, des pièces de 7F ?
10. Et si Picsou joue plutôt un autre nombre impair ?

Picsou enrage !! Il vous propose de recommencer à zéro et fabrique cette fois des pièces de 6 Frik.



11. Que jouez-vous en réponse ?

 Fin de partie 

12. Pouvez-vous donner un exemple de partie de ce jeu qui dure exactement 100 coups ? Exactement 500 coups ?

Notons n la valeur de la première pièce fabriquée (par exemple, $n = 5$). On range dans un tableau les nombres entiers, en en mettant exactement n par ligne. On barre au fur et à mesure les nombres qu'on ne peut plus jouer :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
...				

1	2	3	4	...	$n - 2$	$n - 1$	n
$n + 1$	$n + 2$	$n + 3$	$n + 4$	...	$2n - 2$	$2n - 1$	$2n$
$2n + 1$	$2n + 2$	$2n + 3$	$2n + 4$	...	$3n - 2$	$3n - 1$	$3n$
				...			
				...			

...

13. Où se situent les nombres que l'on ne peut pas jouer au deuxième coup ?
14. À chaque fois qu'un nombre est barré (c'est-à-dire qu'on ne peut plus le jouer), pourquoi tous ceux situés sous lui, dans la même colonne, sont-ils barrés aussi ?
15. Pouvez-vous prouver que le jeu a toujours une fin ?

● Plus grand nombre jouable après deux coups ●

On suppose que les deux premières valeurs choisies sont deux nombres entiers a et b sans diviseur commun autre que 1.

16. Déterminer la plus grande valeur encore jouable après ces deux premiers coups, quand $(a, b) = (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), \dots$
17. Pouvez-vous conjecturer une formule générale pour cette plus grande valeur encore jouable après les deux premiers coups (a, b) ?

● Un bon départ ? Version théorique ●

L'objectif est de démontrer qu'en jouant 5 au départ (et contrairement à 2, 3, 4 et 6), on dispose d'une *stratégie gagnante*, c'est-à-dire que quoi que joue Picsou, on a à chaque fois une réponse qui permet de gagner.

On commence par écrire les nombres entiers dans un tableau à 5 colonnes, comme dans la question **13**. On suppose donc qu'on choisit en premier la valeur 5, et que Picsou répond en choisissant la valeur b , qui n'est pas multiple de 5.

18. À quelle condition deux nombres sont-ils dans la même colonne du tableau ?

On veut montrer que les nombres b , $2b$, $3b$, $4b$ et $5b$ sont tous dans des colonnes différentes du tableau.

Imaginons que parmi les nombres b , $2b$, $3b$, $4b$ et $5b$ il y en ait deux qui tombent dans la même colonne.

19. Montrer qu'alors b , $2b$, $3b$ ou $4b$ est un multiple de 5.

20. Quelles sont les différentes possibilités pour le chiffre des unités de b ? De $2b$, $3b$ et $4b$?

21. En déduire que b , $2b$, $3b$, $4b$ et $5b$ tombent tous dans des colonnes différentes.

22. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de coups possibles après les deux premiers coups $(5, b)$.

23. Quelle est la plus grande valeur encore jouable ? Comparer cette valeur t avec la conjecture de la question 17.

24. Supposons que si vous choisissez de fabriquer des pièces de t Frik, alors Picsou peut gagner en jouant une valeur s ensuite (autrement dit, jouer t n'est pas une stratégie gagnante pour vous, mais s est gagnant pour Picsou). Montrer que l'on peut payer la somme t à partir de 5, b et s .

25. En déduire que vous pouvez voler la stratégie gagnante de Picsou en changeant votre deuxième coup.
26. Conclure que vous avez toujours une stratégie gagnante si vous choisissez 5 au premier coup.

● Un bon départ ? Un exemple ●

On vient de démontrer qu'en jouant 5 au départ, on dispose d'une *stratégie gagnante*, c'est-à-dire que quoi que joue Picsou, on a à chaque fois une réponse qui permet de gagner. Mais... malheureusement, on ne connaît pas explicitement une telle stratégie.

27. Vous jouez 5, Picsou répond 6. Quel est le plus grand montant que vous pouvez jouer ? Montrez que c'est un coup gagnant (quoi que réponde Picsou, si vous jouez bien vous gagnerez !)
28. Vous jouez 5, Picsou répond 7. Saurez-vous trouver un coup gagnant ?

\$\$\$ Question à 1 000 \$! \$\$\$

29. Si vous commencez par fabriquer des pièces de 16 Frik, et que Picsou et vous jouez le mieux possible, qui gagne à la fin ?
- (Attention : la réponse n'est connue de personne à l'heure actuelle.)