

La monnaie de sa pièce

Une nouvelle monnaie mondiale est créée : le Frik. Seules deux banques ont le droit de décider quelles nouvelles pièces de Frik fabriquer pour toute la planète. Vous en dirigez une, votre concurrent M. Picsou dirige l'autre. Chaque jour, en alternance, vous décidez chacun d'une nouvelle valeur de pièce à éditer, mais vous devez respecter deux règles :

- aucun de vous n'a le droit d'émettre de pièce de 1 Frik (et il n'y a pas de centimes) ;
- aucun de vous n'a le droit d'émettre une nouvelle pièce d'une valeur que l'on pouvait déjà payer avec les pièces existant précédemment, en additionnant des pièces déjà créées (sans rendre la monnaie).

Le premier qui ne peut plus fabriquer de nouvelle pièce est déclaré perdant. L'autre a gagné.



● Premiers essais ●

1. Si Picsou commence par éditer des pièces de 2 Frik, quels sont les nombres que l'on peut obtenir avec ces pièces en les additionnant ? Quels sont ceux qu'on ne peut pas obtenir ?

Tu peux donc décider ensuite de fabriquer une pièce d'une valeur impaire, par exemple de 9 Frik. Cela interdit de fabriquer ensuite des pièces de $2+9=11$ Frik, mais aussi de $2+2+9=13$ Frik, etc.

2. Donne d'autres exemples de pièces qu'on n'a plus le droit de créer.
3. Cette fois, Picsou commence par éditer une pièce de 6 Frik. Quelles nouvelles pièces peux-tu éditer ?
Lesquelles ne peux-tu plus créer ?
4. On suppose que Picsou commence en fait par fabriquer des pièces de 2 Frik.
Quelle pièce dois-tu fabriquer pour gagner ?
5. Quelle pièce dois-tu fabriquer pour gagner si Picsou commence par fabriquer des pièces de 3 Frik ?
6. Joue quelques parties du jeu contre un autre joueur !

● Nouvelles règles ! ●

On suppose maintenant qu'on a le droit de rendre la monnaie. Par exemple, avec des pièces de 4 Frik et de 7 Frik, on peut payer 3 Frik : on donne 7 Frik au marchand, et il nous rend 4 Frik. On a donc payé $7 - 4 = 3$ Frik, ce qui n'est pas possible avec les règles du début.

7. Si Picsou fabrique des pièces de 4 Frik et que tu fabriques ensuite des pièces de 6 Frik, quelles sont les valeurs interdites pour le prochain choix de Picsou ?

8. Même question si les deux premiers choix sont 6 et 9.

Et si les deux premiers choix sont 8 et 13 ?

9. Si les deux premiers choix sont 30 et 77, comment peut-on payer 1 Frik ?

On pourra chercher à fabriquer les sommes les plus petites possibles en payant avec la pièce la plus grande (77), puis en rendant le plus de pièces de petite valeur, sans dépasser 77 (donc deux pièces de 30), ce qui permet de payer $77 - 2 \times 30 = 17$. Puis on recommence à partir des deux valeurs possibles obtenues jusqu'ici : 17 et 30. On peut donc payer $30 - 17 = 13$ Frik. Puis on recommence avec 13 et 17, etc.

10. Peux-tu donner d'autres exemples de choix de deux premières pièces permettant de payer 1 Frik, donc de payer tous les nombres entiers ?

Quelle est la propriété de ces choix ?

11. Propose une méthode pour déterminer la plus petite valeur que l'on peut payer à partir de deux valeurs de pièces.

Sais-tu comment s'appelle cette valeur ?

12. Qui a une stratégie pour gagner à tous les coups quand on a le droit de rendre la monnaie ? Le premier joueur ou le second ?