

# La monnaie de sa pièce

Une nouvelle monnaie mondiale est créée : le Frik. Seules deux banques ont le droit de décider quelles nouvelles pièces de Frik fabriquer pour toute la planète. Vous en dirigez une, votre concurrent M. Picsou dirige l'autre. Chaque jour, en alternance, vous décidez chacun d'une nouvelle valeur de pièce à éditer, mais vous devez respecter deux règles :

- aucun de vous n'a le droit d'émettre de pièce de 1 Frik (et il n'y a pas de centimes) ;
- aucun de vous n'a le droit d'émettre une nouvelle pièce d'une valeur que l'on pouvait déjà payer avec les pièces existant précédemment, en additionnant des pièces déjà créées (sans rendre la monnaie).

Le premier qui ne peut plus fabriquer de nouvelle pièce est déclaré perdant. L'autre a gagné.



Par exemple, si Picsou commence par éditer des pièces de 2 Frik, en les ajoutant on peut obtenir tous les nombres pairs, mais aucun nombre impair. Vous pouvez donc décider ensuite de fabriquer une pièce d'une valeur

impair, par exemple de 9 Frik. Cela interdit de fabriquer ensuite des pièces de  $2+9=11$  Frik, mais aussi de  $2+2+9=13$  Frik, etc.

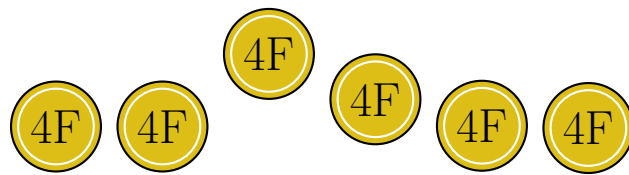
### ● Premiers essais ●

1. Si Picsou commence par éditer une pièce de 6 Frik, quelles nouvelles pièces pouvez-vous éditer ? Lesquelles ne pouvez-vous plus éditer ?
2. Quelle pièce devriez-vous fabriquer si Picsou fabrique des pièces de 2 Frik ?
3. Quelle pièce devriez-vous fabriquer si Picsou fabrique des pièces de 3 Frik ?

Le premier qui fabrique des pièces de 2 ou de 3 Frik risque de perdre... il est même sûr de perdre si son concurrent joue bien !

### ● Mauvais départs ●

Nous allons regarder le cas où Picsou commence et qu'il décide de fabriquer des pièces de 4 Frik.



4. Vous décidez alors de fabriquer des pièces de 5 Frik. Quelles sont les seules possibilités pour Picsou ensuite ?
5. Pour chaque réponse possible de Picsou, pouvez-vous décrire une bonne stratégie ?
6. Finalement, est-ce un bon choix de votre part de fabriquer des pièces de 5 Frik en réponse aux pièces de 4 Frik ?

7. **Nouvel essai : après que Picsou a décidé de fabriquer des pièces de 4 Frik, vous fabriquez des pièces de 6 Frik. Pouvez-vous établir une manière de gagner la partie, quoi que fasse Picsou ?**

Picsou enrage!! Il vous propose de recommencer à zéro et fabrique cette fois des pièces de 6 Frik.



8. **Que jouez-vous en réponse ?**



9. **Pouvez-vous donner un exemple de partie de ce jeu aussi longue que vous voulez ?**

Notons  $n$  la valeur de la première pièce fabriquée (par exemple,  $n = 5$ ). On range dans un tableau les nombres entiers, en en mettant exactement  $n$  par ligne. On barre au fur et à mesure les nombres qu'on ne peut plus jouer.

|     |    |    |    |    |     |    |    |    |     |      |      |    |
|-----|----|----|----|----|-----|----|----|----|-----|------|------|----|
| 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 1   | 2  | 3  | 4  | ... | n-2  | n-1  | n  |
| 6   | 7  | 8  | 9  | 10 | 6   | 7  | 8  | 9  | ... | 2n-2 | 2n-1 | 2n |
| 11  | 12 | 13 | 14 | 15 | 11  | 12 | 13 | 14 | ... | 3n-2 | 3n-1 | 3n |
|     |    |    |    |    |     |    |    |    | ... |      |      |    |
|     |    |    |    |    |     |    |    |    | ... |      |      |    |
| ... |    |    |    |    | ... |    |    |    |     |      |      |    |

10. **Où se situent les nombres que l'on ne peut pas jouer au deuxième coup ?**
11. **À chaque fois qu'un nombre est barré (c'est-à-dire qu'on ne peut plus le jouer), pourquoi tous ceux situés sous lui, dans la même colonne, sont-il barrés aussi ?**

## 12. Pouvez-vous prouver que le jeu a toujours une fin ?

### ● Comment Picsou peut-il gagner ? ●

On a vu plus haut que s'il commençait par 2, 3, 4, ou 6, Picsou pouvait être battu si vous jouiez bien. Que se passe-t-il si Picsou commence par fabriquer des pièces de 5 Frik, par exemple ?

On suppose plus généralement que Picsou a commencé par fabriquer des pièces de  $a$  Frik et vous des pièces de  $b$  Frik, avec  $a$  et  $b$  sans facteur commun, et  $(a, b) \neq (2, 3)$  ou  $(3, 2)$ .

Notons  $t$  la plus grande valeur jouable par Picsou après ces deux premiers coups.

**13. En raisonnant comme aux questions 10., 11., 12., montrer que  $t = ab - a - b$  (on pourra considérer le premier nombre barré dans chaque colonne).**

**14. Soit  $s < t$  un nombre encore autorisé après  $(a, b)$ . Essayez de montrer que les trois premiers coups  $(a, b, s)$  éliminent la possibilité de jouer  $t$  ensuite (utilisez un tableau analogue à celui de la question 10.).**

Supposons que Picsou fabrique des pièces de  $t$  Frik et que cela ne fasse pas partie d'une stratégie gagnante pour lui. Il existe donc un nombre  $s < t$  jouable par vous-même et vous permettant de gagner.

**15. Dédurre de la question précédente une méthode permettant à Picsou de gagner en changeant son deuxième coup pour voler votre stratégie gagnante.**

**16. Montrer que si les deux premiers coups sont  $(a, b)$ , Picsou a une stratégie gagnante.**

17. Si  $p \geq 5$  est un nombre premier, montrer que fabriquer des pièces de  $p$  Frik est le début d'une stratégie gagnante pour Picsou.
18. Si  $n$  n'est pas un nombre premier, et si  $n$  n'est pas de la forme  $2^a 3^b$ , montrer que si Picsou commence par fabriquer des pièces de  $n$  Frik, alors vous avez une stratégie gagnante.
19. Pour tout  $2 \leq n \leq 15$ , déterminer (en fonction de  $n$ ) qui a la stratégie gagnante si au premier coup, Picsou fabrique  $n$  pièces.

 Question à 1 000 \$ ! 

20. Si vous commencez par fabriquer des pièces de 16 Frik, et que Picsou et vous jouez le mieux possible, qui gagne à la fin ?
- (Attention : la réponse n'est connue de personne à l'heure actuelle.)