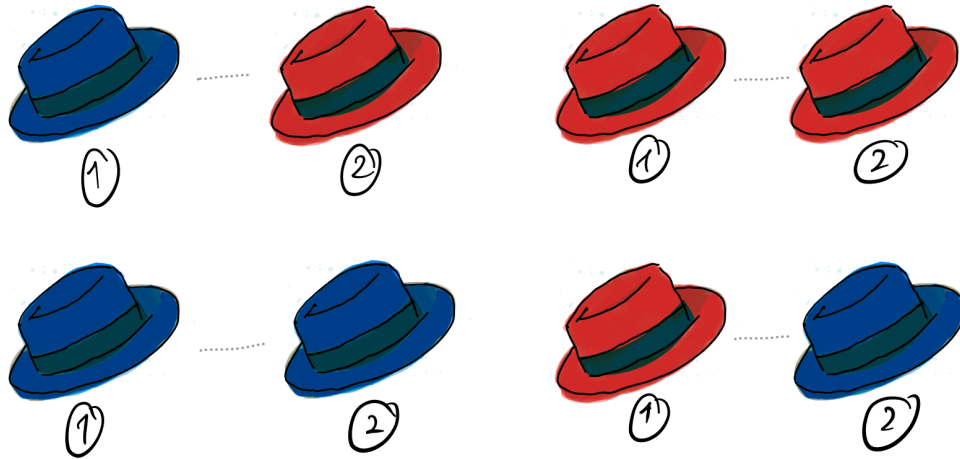


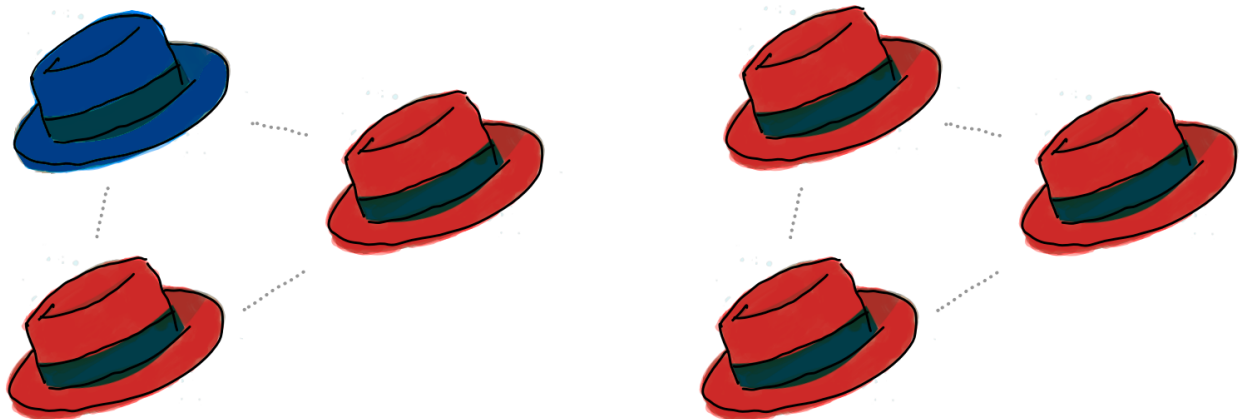
Chapeau bas !

On propose le jeu suivant. On forme une équipe d'un nombre $N \geq 2$ de joueuses, numérotées $1, 2, 3, \dots, N$. On place, sur la tête de chacune, un chapeau de couleur choisie au hasard : bleu ou rouge (une chance sur deux, indépendamment pour chaque chapeau). Placées en cercle, les joueuses voient la couleur de tous les chapeaux, à l'exception du leur. On demande alors à la joueuse 1 la couleur de son chapeau. La seule réponse autorisée est "bleu" ou "rouge". Toute autre action (grimace, clin d'oeil, code secret...) entraîne la disqualification de l'équipe entière. Puis, la même question est posée au joueur 2, et ainsi de suite, jusqu'au dernier joueur, N . Si *tous* les joueurs ont trouvé la couleur de leur chapeau, l'équipe gagne un séjour de six mois à l'île Maurice, pour fêter ça. En cas d'échec d'un seul joueur, personne ne gagne rien... Les joueurs ont le droit de se concerter avant le jeu, pour décider ensemble d'une stratégie. Le défi est de trouver une stratégie qui rende la victoire beaucoup plus probable que si les réponses sont données au hasard.

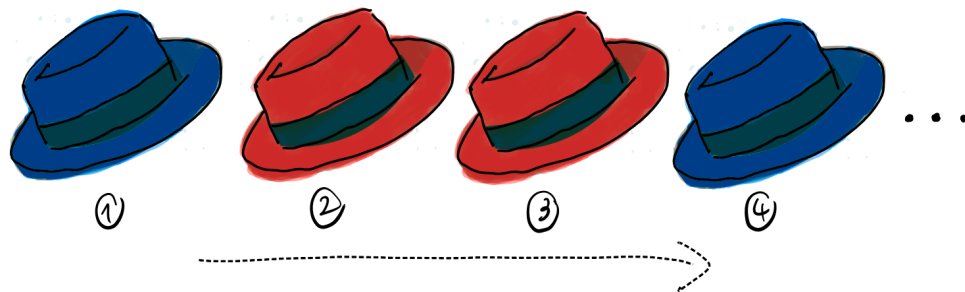
1. On suppose $N = 2$. Montrez que, si les réponses sont données au hasard, l'équipe a 25% de chances de gagner. Proposez ensuite une stratégie, qui est gagnante dans la moitié des cas ! Pour vous guider, voici la liste des 4 cas possibles.



2. En général, montrez que la meilleure stratégie imaginable, ne peut être gagnante que dans la moitié des cas, au maximum.
3. Quand $N = 3$, quelle est la probabilité que l'équipe gagne, en répondant au hasard ? Là encore, proposez une stratégie plus efficace que "répondre au hasard" ! Pour vous guider, voici deux cas possibles, sans les numéros.



4. Proposez une stratégie gagnante dans la moitié des cas, pour tout nombre N de joueuses. Commencez par $N = 3$, et penser "parité" :) Cette stratégie est-elle sensible à l'ordre de passage ? Testez votre stratégie en jouant entre vous, avec les chapeaux fournis :)
5. On introduit une nouvelle variante du jeu. Les joueurs sont placés en file indienne. Chacun voit la couleur des chapeaux devant lui, mais rien derrière. L'ordre de passage est comme suit :



Proposez une stratégie gagnante à 50%.

6. (Difficile) Que se passe-t-il si l'on autorise trois couleurs : rouge, bleu et noir ?