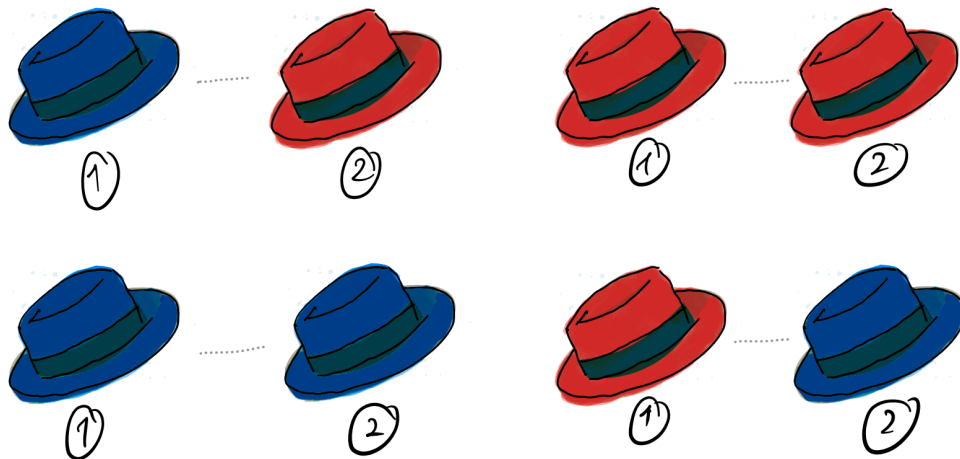
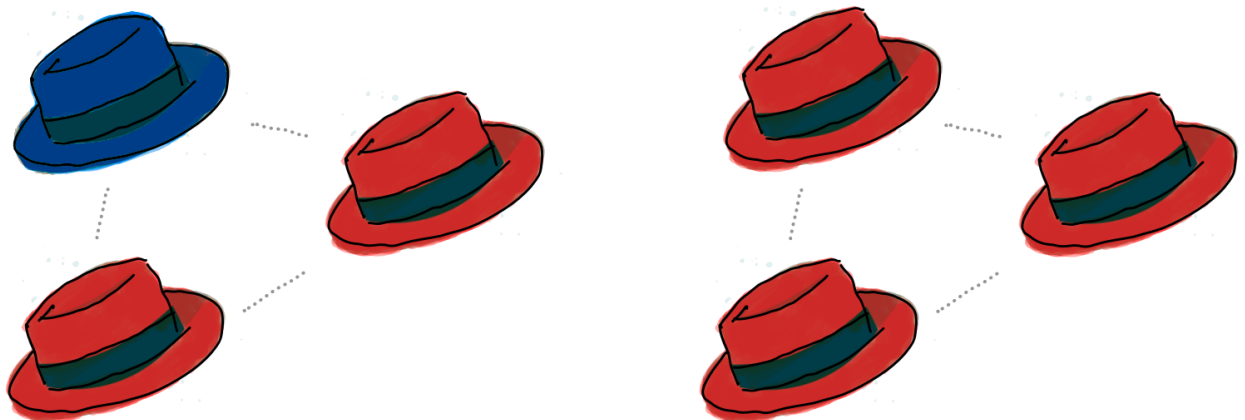


On propose le jeu suivant. On forme une équipe d'un nombre $N \geq 2$ de joueuses, numérotées $1, 2, 3, \dots, N$. On place, sur la tête de chacune, un chapeau de couleur choisie au hasard : bleu ou rouge (une chance sur deux, indépendamment pour chaque chapeau). Placées en cercle, les joueuses voient la couleur du chapeau de chacune des participantes, à l'exception du leur. On demande alors à la joueuse 1 la couleur de son chapeau. La seule réponse autorisée est "bleu" ou "rouge". Toute autre action (grimace, clin d'oeil, code secret...) entraîne la disqualification de l'équipe entière. Puis, la même question est posée à la joueuse 2, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière joueuse, N . Si *tout le monde* a trouvé la couleur de son chapeau, l'équipe gagne un séjour d'un mois en Patagonie, pour fêter ça. En cas d'échec d'un seul joueur, personne ne gagne rien... Les joueuses ont le droit de se concerter avant le jeu, pour décider ensemble d'une stratégie. Le défi est de trouver une stratégie qui rende la victoire beaucoup plus probable que si les réponses sont données au hasard.

1. Quelle est la probabilité de succès, de la stratégie "répondre au hasard" ?
2. On suppose que les joueuses ont mis au point une stratégie. Montrer qu'elle n'est gagnante que dans la moitié des cas, au maximum.

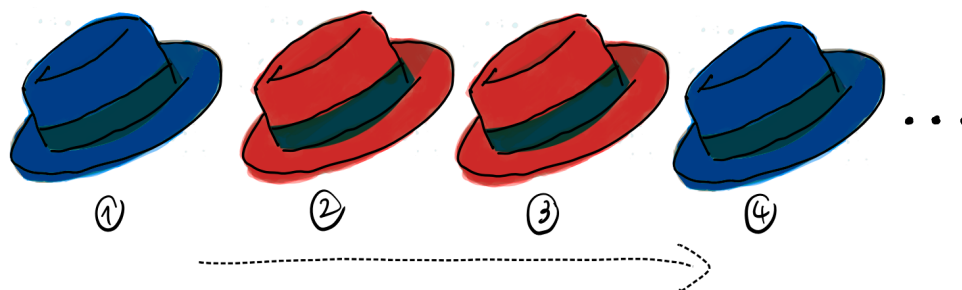


3. Quand $N = 2$, proposer une stratégie gagnante à 50%.



4. Proposer une stratégie gagnante dans la moitié des cas, pour tout $N \geq 3$. Penser "parité" :) Cette stratégie est-elle sensible à l'ordre de passage ?

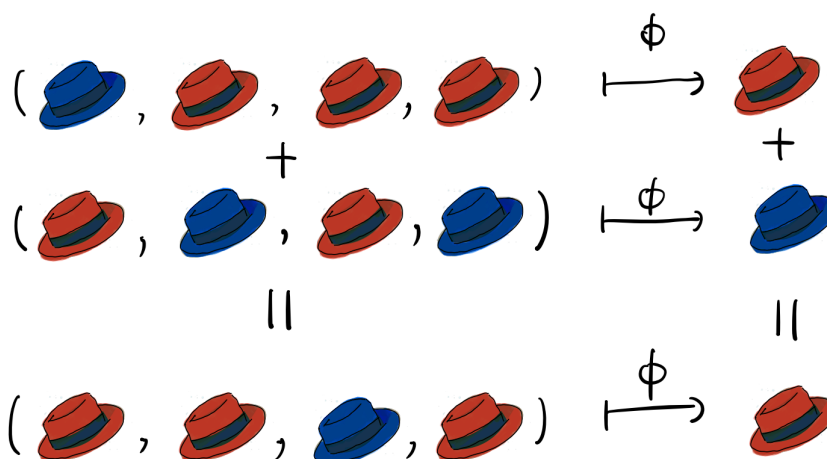
5. On introduit une variante du jeu. Les joueurs sont placés en file indienne. Chacun voit la couleur des chapeaux devant lui, mais rien derrière. L'ordre de passage est comme suit :



Proposer une stratégie gagnante à 50%.

6. Proposer une modélisation de la stratégie des Questions 4 et 5, avec de l'algèbre linéaire. On utilisera le corps $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ pour paramétrer les couleurs : 0 pour bleu, 1 pour rouge. On se servira du $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel $\mathbb{F}_2^N$, pour paramétrer les configurations de couleurs de chapeaux. On fera en sorte que la réponse fournie par le premier joueur, soit donnée par une forme linéaire $\phi : \mathbb{F}_2^N \longrightarrow \mathbb{F}_2$.

Rappel : c'est une fonction qui vérifie $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{F}_2^N$.



7. Adapter la modélisation précédente, au cas où l'on autorise 3 couleurs de chapeaux (rouge, bleu, noir). Penser "modulo 3".
8. Même question, avec un ensemble infini de couleurs. On supposera plus précisément, que les couleurs sont paramétrées par le corps $\mathbb{R}$ des nombre réels. On fera de l'algèbre linéaire, dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^N$.
9. (Beaucoup plus difficile) Il existe en fait une stratégie gagnante dans la moitié des cas, pour tout ensemble de couleurs et pour tout ensemble de joueurs (éventuellement infinis). Des idées ?