



Chapeau bas !

fiche animateurs niveau jaune

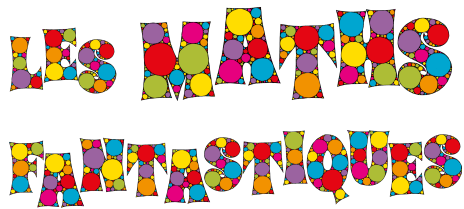
1. 1 chance sur deux pour chaque couleur $\implies (1/2) * (1/2) = 1/4$ de gagner. En profiter peut-être, pour expliquer que les chances sont "multipliées".
2. Le premier donne pour réponse, la couleur du second. Le second donne la même réponse et trouve ainsi sa couleur. La stratégie gagne ssi les deux couleurs sont les mêmes, soit une fois sur deux.
3. $(1/2)^3 = 1/8$, et $(1/2)^5 = 1/32$.
4. Non, seul compte le nombre de couleurs (ici 2).
5. C'est plus difficile, et il faudra probablement les guider. Le joueur 1 compte le nombre de chapeaux rouges qu'il voit (0,1 ou 2). Si ce nombre est pair, il dit "rouge", sinon, "bleu". Les deux autres joueurs peuvent alors trouver leur couleur. Par exemple, joueur 2 regarde la couleur de joueur 3 (la couleur de 1 n'a pas d'importance). Si c'est rouge, et que le premier a dit rouge, joueur 2 en déduit qu'il est rouge. Etc... au cas par cas. Joueur 3 procède de même : l'ordre de passage n'est pas important.
6. On adapte comme suit la question 5. Le joueur 1 compte le nombre de chapeaux rouges qu'il voit (0,1 ou 2). Si ce nombre est pair, il dit "rouge", sinon, "bleu". Joueur 2

regarde la couleur de joueur 3. Si c'est rouge, et que le premier a dit rouge, joueur 2 en déduit qu'il est rouge. Joueur 3 connaît alors la couleur de joueur 2 (parce qu'il a entendu sa réponse). On termine comme précédemment.

7. Le joueur 1 compte le nombre de chapeaux rouges qu'il voit. Si ce nombre est pair, il dit "rouge", sinon, "bleu". Les autres joueurs peuvent alors trouver leur couleur. Ils comptent le nombre de chapeaux rouges qu'ils voient, en ignorant le premier joueur. Si c'est un nombre pair et que le premier a dit "rouge", leur chapeau est bleu. Si c'est un nombre pair et que le premier a dit "bleu", leur chapeau est rouge. Etc...

Pour la file indienne, on procède de même : ayant écouté les réponses de tous les joueurs le précédant, chaque joueur peut se comporter comme s'il avait vu toutes les couleurs-à l'exception de celle du premier, toujours inutile.

Cette stratégie gagne ssi le premier trouve sa couleur, chose qui arrive une fois sur deux.



Chapeau bas !

fiche animateurs niveau orange

1. On suppose $N = 2$. 1 chance sur deux pour chaque couleur $\Rightarrow (1/2) * (1/2) = 1/4$ de gagner. En profiter peut-être, pour expliquer que les chances sont "multipliées". Le premier donne pour réponse, la couleur du second. Le second donne la même réponse et trouve ainsi sa couleur. La stratégie gagne ssi les deux couleurs sont les mêmes, soit une fois sur deux.
2. Quelle que soit la stratégie, la première joueuse qui répond n'a aucune information sur sa couleur. Sa réponse est donc "correcte" une fois sur deux. Globalement, la stratégie fonctionne donc, au mieux, une fois sur deux. Le cas optimal, serait donc celui où l'information communiquée par la première joueuse, permet à toutes les autres de trouver leur couleur.
3. La proba demandée est $1/8$.
4. La stratégie pour $N = 3$ est la même que pour ce cas général, que voici. Le joueur 1 compte le nombre de chapeaux rouges qu'il voit. Si ce nombre est pair, il dit "rouge", sinon, "bleu". Les autres joueurs peuvent alors trouver leur couleur. Ils comptent le nombre de chapeaux rouges qu'ils voient, en ignorant le premier joueur. Si c'est un nombre

pair et que le premier a dit "rouge", leur chapeau est bleu. Si c'est un nombre pair et que le premier a dit "bleu", leur chapeau est rouge. Etc.. L'ordre de passage n'est pas important.

5. On procède de même : ayant écouté les réponses de tous les joueurs le précédant, chaque joueur peut se comporter comme s'il avait vu toutes les couleurs- à l'exception de celle du premier, toujours inutile.
6. On utilise le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ pour modéliser les couleurs. Le code est par exemple 0=bleu, 1=rouge et 2=noir. Rappel : $1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 1$, $1 + 2 = 0$. La première joueuse calcule la somme S des couleurs qu'elle voit, et donne le résultat comme réponse. Les autres soustraient à S , la somme des couleurs qu'elles voient, en ignorant la couleur de la première. Le résultat est leur propre couleur.



Chapeau bas !

fiche animateurs niveau bleu

1. $1/2^N$.
2. Quelle que soit la stratégie, la première joueuse qui répond n'a aucune information sur sa couleur. Sa réponse est donc "correcte" une fois sur deux. Globalement, la stratégie fonctionne donc, au mieux, une fois sur deux. Le cas optimal, serait donc celui où l'information communiquée par la première joueuse, permet à toutes les autres de trouver leur couleur.
3. Le premier donne pour réponse, la couleur du second. Le second donne la même réponse et trouve ainsi sa couleur. La stratégie gagne ssi les deux couleurs sont les mêmes, soit une fois sur deux.
4. Le joueur 1 compte le nombre de chapeaux rouges qu'il voit. Si ce nombre est pair, il dit "rouge", sinon, "bleu". Les autres joueurs peuvent alors trouver leur couleur. Ils comptent le nombre de chapeaux rouges qu'ils voient, en ignorant le premier joueur. Si c'est un nombre pair et que le premier a dit "rouge", leur chapeau est bleu. Si c'est un nombre pair et que le premier a dit "bleu", leur chapeau est rouge. Etc.. L'ordre de passage n'est pas important.
5. On procède de même : ayant écouté les réponses de tous

les joueurs le précédant, chaque joueur peut se comporter comme s'il avait vu toutes les couleurs- à l'exception de celle du premier, toujours inutile.

6. On prend pour ϕ la fonction "somme des coordonnées", $\phi(x_2, x_3, \dots, x_N) = x_2 + \dots + x_N$. On ignore la coordonnée x_1 (couleur du premier chapeau) qui est sans importance. Avec le code couleur 0=bleu et 1=rouge, on vérifie que $\phi(x_2, x_3, \dots, x_N)$ donne la parité du nombre de chapeaux rouges, vu par la première joueuse. Elle répond donc " $\phi(x_2, x_3, \dots, x_N)$ ". La deuxième joueuse peut calculer $\phi(0, x_3, \dots, x_N)$ et en déduit

$$x_2 = \phi(x_2, x_3, \dots, x_N) - \phi(0, x_3, \dots, x_N).$$

On procède de manière semblable pour les autres joueuses, et pour la file indienne.

7. On utilise le corps $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ (also known as $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$). Le code est par exemple 0=bleu, 1=rouge et 2=noir. La stratégie est alors identique à celle de la question 6, en remplaçant $\mathbb{F}_2$ par $\mathbb{F}_3$.
8. Même modélisation.
9. On suppose pour commencer que l'ensemble C des couleurs est fini, de cardinal c . On utilise alors l'anneau $A := \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ pour coder les couleurs. Pour un nombre fini N de joueurs, on peut faire comme précédemment. Techniquement, on traite A^N comme un A -module. Les axiomes sont les mêmes que pour les espaces vectoriels. La différence avec le cas précédent, est que l'anneau A n'est pas forcément un corps

(c'est le cas ssi c est un nombre premier). Ceci n'est pas important, car on n'a pas besoin que les éléments non nuls de A soient inversibles, pour appliquer la stratégie.

Si l'ensemble C est infini (N étant toujours fini), on peut montrer qu'il existe une structure de corps commutatif sur C . Autrement dit, on peut alors paramétrer les couleurs par un corps commutatif infini K . On travaille alors avec le K -espace vectoriel K^N , et la stratégie précédente marche "verbatim".

Reste à considérer le cas d'un *ensemble* N infini de joueurs.

Si l'ensemble des couleurs est infini, on les paramètre par un corps K , comme précédemment. On doit alors fournir une forme linéaire $\phi : K^N \longrightarrow K$. On remarque que la propriété souhaitée de ϕ , est de prolonger la forme linéaire "somme des coordonnées"

$$K^{(N)} \longrightarrow K,$$

$$(x_n) \mapsto \sum x_n.$$

Ici, on a désigné par $K^{(N)} \subset K^N$ le sous-espace vectoriel des fonctions $(N \longrightarrow K)$ à support fini. On peut alors déduire qu'une telle forme linéaire existe, du résultat suivant. Soit V un K -espace vectoriel, et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel. Alors toute forme K -linéaire $f : W \longrightarrow K$ peut être prolongée en une forme K -linéaire $\tilde{f} : V \longrightarrow K$.

Si l'ensemble des couleurs est fini, on utilise l'anneau $A := \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ pour les paramétrer. On peut montrer que la forme "somme des coordonnées"

$$A^{(N)} \longrightarrow A$$

admet alors aussi un prolongement en une forme A -linéaire

$$\phi : A^N \longrightarrow A,$$

qu'on utilise dans la stratégie. Techniquement, on a mieux : Le A -module A^N est libre, et $A^{(N)}$ en est un facteur direct. On remarquera que, dans le cas d'une infinité de joueurs, ou d'une infinité de couleurs, la stratégie utilise une forme forte de l'axiome du choix.