



C'est gonflé !

Fiche animateur

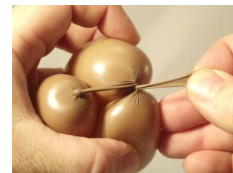
Ce stand permet de travailler sur des graphes, de la géométrie dans l'espace et les polyèdres réguliers. N'hésitez pas à offrir aux participant·e·s leur réalisation en ballons à la fin. (N'oubliez pas que le nombre de ballons disponibles sur le stand est limité, il en faudra pour tout le monde!)

Aide pratique pour la manipulation de ballons

Il ne faut pas les gonfler jusqu'au bout, mais garder une petite réserve sans air (sinon ils risquent d'éclater quand on les pince), de 5cm à la largeur de la main environ si on le twiste beaucoup.

Pour faire une "bulle", pincer et tourner trois fois le ballon. Pour en faire plusieurs, tourner chaque fois dans le même sens, en maintenant la première et la dernière (pas besoin de tenir les intermédiaires) sinon ça se défait. Une fois qu'on attache ensemble deux parties twistées (d'un même ballon ou entre deux ballons), elles tiennent toutes seules sans se défaire.

Pour attacher un ballon à un autre par une extrémité, on peut utiliser le noeud du ballon et l'entortiller, ou l'autre extrémité en tirant un peu dessus pour pouvoir l'entortiller un peu. (Utile pour les polyèdres)



Si besoin, les tutoriels sur <https://www.monsieur-ballon.com/fr/tutoriels> sont très clairs.

Remarque-excuse à destination des théoriciens des graphes : Sur ce stand on parle de *graphes* alors qu'il s'agit en fait de *multigraphes* puisqu'on autorise plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.

J,O,B 1-2 Le petit chien est facile à tracer sans lever le crayon, le X n'est pas possible (on s'en convainc aisément en testant toutes les possibilités : partir du centre, partir d'une extrémité).

Vous disposez sur le stand de feuilles imprimées sur lesquelles figurent plusieurs graphes en gris clair, que l'on peut essayer de parcourir au stylo/feutre/crayon de couleur.

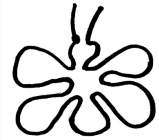
J,O,B 3 Cette question est simple et sert à rendre explicite le lien entre une sculpture en ballon et son graphe, ainsi que l'équivalence entre graphe eulérien (dans lequel il y a un chemin qui parcourt toutes les arêtes exactement une fois) et graphes réalisables avec un seul ballon.

On peut réaliser le petit chien avec un seul ballon, en suivant le chemin tracé précédemment. Les deux extrémités du ballon sont au bout de la queue et au nez du chien. On ne peut pas réaliser le X avec un seul ballon.

J,O 4 Le chien a 2 sommets impairs, le X en a 4.

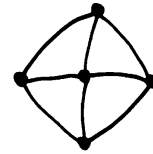
J,O 5, B4 Quand on parcourt le graphe, d'un bout du ballon à l'autre, chaque fois qu'on traverse un sommet, on y arrive par une arête, on en ressort par une autre arête. Tous les sommets, à part celui de départ et celui d'arrivée, ont donc un nombre pair d'arêtes. Le sommet de départ et celui d'arrivée ont eux un nombre impair d'arêtes, sauf dans le cas où le point d'arrivée et le point de départ sont les mêmes. Il y a donc 2 ou 0 sommets impairs. Dans le cas sans sommet impair, on a un cycle qui parcourt tout le graphe, n'importe quel sommet peut être choisi comme point de départ.

On peut réaliser le papillon avec un seul ballon, par exemple comme ci-contre.



J,O 6-7, B5

Au niveau bleu, on peut invoquer l'argument qu'il n'y a que deux sommets impairs.



Le deuxième graphe, en revanche, ne peut être réalisé avec un seul ballon car il a 4 sommets impairs.

B6 Le résultat est clair pour un graphe avec une seule arête.

Prenons un graphe connexe avec au moins 2 arêtes, et 0 ou 2 sommets impairs. Imaginons que l'on parcoure le graphe en partant d'un sommet impair s'il y en a, en partant de n'importe quel sommet sinon, puis au hasard en ne s'arrêtant que si on est bloqué.

Dans le cas où tous les sommets sont pairs, on revient alors nécessairement au point de départ. Si on a parcouru toutes les arêtes, c'est bon. Sinon, on enlève le chemin parcouru. Le graphe restant a peut-être plusieurs composantes connexes, dont tous les sommets sont pairs. Par récurrence, on peut les parcourir par des cycles eulériens. En mettant tous ces chemins bout à bout, on obtient un parcours eulérien du graphe de départ.

Dans le cas où il y a 2 sommets impairs, on ne peut être bloqué qu'en arrivant sur l'autre sommet impair. Comme dans le cas précédent, si on n'a pas parcouru tout le graphe, on enlève les arêtes parcourues. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux composantes connexes du graphe restant, dont tous les sommets sont pairs, et recoller les différents parcours.

J8,O 8-9,B7, B10 Seul l'octaèdre peut être fait avec un seul ballon. S'il y a $2n$ sommets impairs, alors il faut au moins n ballons pour réaliser le graphe. En effet, en chaque sommet impair doit se trouver une extrémité d'un ballon, et chaque ballon a 2 extrémités. On voit ainsi qu'il faut au moins 2 ballons pour faire le tétraèdre, au moins 4 ballons pour faire le cube, au moins 10 pour le dodécaèdre et au moins 6 pour l'icosaèdre (à chaque fois : la moitié du nombre de sommets).

En niveau jaune et orange, on peut donner une méthode qui marche pour démontrer qu'on peut effectivement les construire avec ce nombre de ballons. (En niveau jaune avec les plus jeunes, on peut aussi se contenter de solutions qui marchent, sans être minimales.).



photos issues de l'article *Computational Balloon Twisting : The Theory of Balloon Polyhedra* de Erik D. Demaine, Martin L. Demaine et Vi Hart

En niveau bleu, on va démontrer que s'il y a $2n$ sommets impairs, alors n ballons suffisent à la question 9.

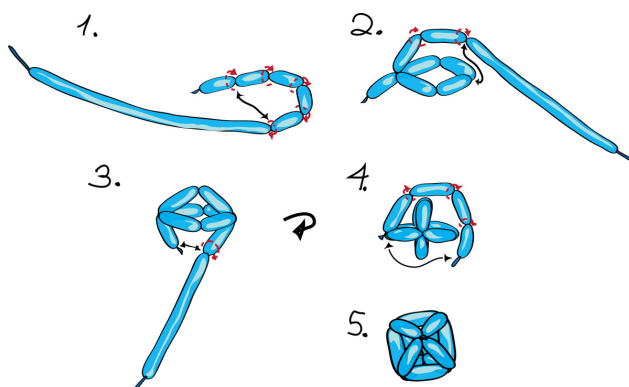
B8 Cela vient juste du fait que chaque arête a deux extrémités (éventuellement confondues). Prenons notre graphe et étiquetons chaque sommet par son degré, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui y arrivent. Imaginons qu'on efface une arête, le degré de chaque extrémité diminue de 1, donc sur le graphe la somme totale des degrés des sommets diminue de 2 et ne change pas de parité. Si on efface toutes les arêtes, on obtient 0, donc dès le début elle est paire, et le graphe a donc un nombre pair de sommets impairs.

B9 On a $2n$ sommets impairs. Comme chaque sommet impair doit se trouver une extrémité d'un ballon, et chaque ballon a 2 extrémités, il faut au moins n ballons.

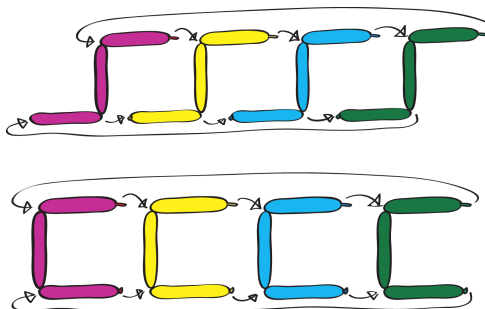
Réciproquement, ajoutons à notre graphe des arcs supplémentaires reliant 2 par 2 les sommets impairs, sauf pour 2 d'entre eux. Cette opération nécessite l'ajout de $(n - 1)$ arcs. Le graphe obtenu admet un parcours eulérien. Prenons un tel parcours, et effaçons dessus les arcs ajoutés (ou éclatons les bulles de ballons correspondantes). On obtient au plus n chemins eulériens, donc n ballons suffisent.

J9,O10,B11 Voici des solutions possibles. Sur le stand, vous aurez des fiches présentant une indication de construction ; vous pouvez les donner à celles et ceux qui souhaiteront de l'aide, les garder cachées pour les autres.

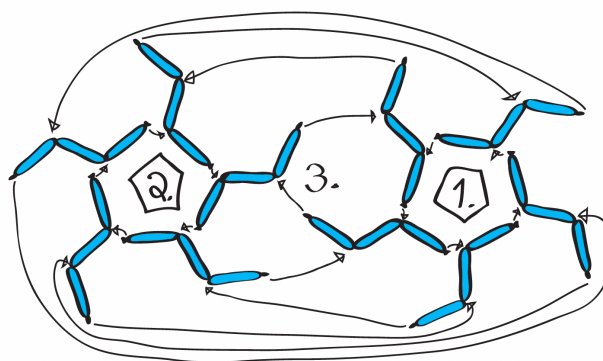
- L'octaèdre se fait avec un seul ballon, voici un mode d'emploi pour le faire :



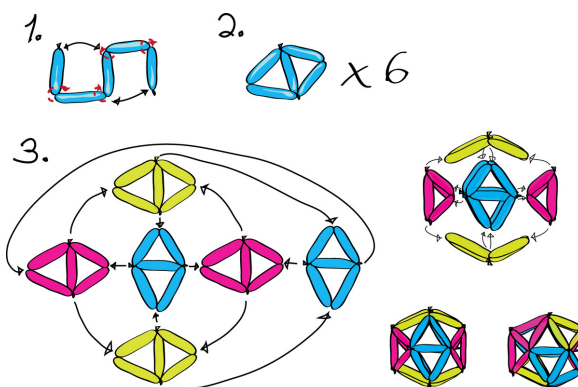
- Deux idées de solutions pour le cube :



- le dodécaèdre avec 10 ballons :



- L'icosaèdre se prête bien au défi collectif, une personne peut faire une brique de base formée de deux triangles (avec un ballon), que l'on peut ensuite agencer ensemble.

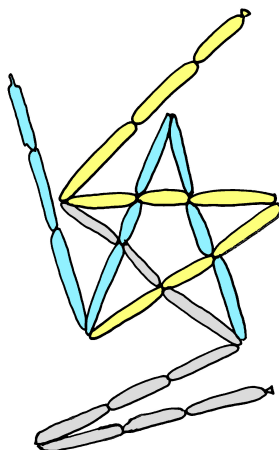


Les participant·e·s qui le souhaitent (notamment les enfants), peuvent partir avec leurs réalisations.

J10,O11 Pour faire faire le tétraèdre avec un seul ballon, tout comme n'importe quel graphe, on peut ajouter au graphe des arêtes entre les sommets impairs afin de le construire d'un seul ballon, puis éclater les arêtes ajoutées !

B12 Le petit dodécaèdre étoilé est l'un des quatre polyèdres réguliers non convexes. Ses 12 faces sont des pentagrammes réguliers (en forme d'étoile à cinq branches). Vous pouvez aussi le voir comme un dodécaèdre sur les faces duquel on aurait ajouté des pyramides à base pentagonale.

On peut le faire avec 6 ballons, mais en raison du grand nombre de bulles que cela fait faire sur un ballon, nous recommandons plutôt d'essayer avec 10 ballons. On peut faire une face comme suit, et les assembler entre elles habilement :



Voici une solution (pas très lisible, pardon...)

Cette réalisation pourrait éventuellement être un travail d'équipe avec des participant·e·s surmotivé·e·s ! Si jamais vous le faites, prenez des photos !! Merci !!

