



Les banques du grand Sultan

Le grand Sultan du golfe écarlate fait face à un problème très sérieux : certaines banques de son royaume sont en dette et il n'a plus d'or à leur donner. Par contre, d'autres banques ont de l'or dans leur réserve et le grand Sultan pense à une redistribution pour régler les dettes.

Il y a des difficultés :

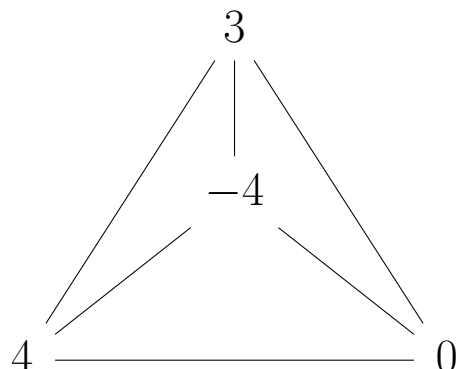
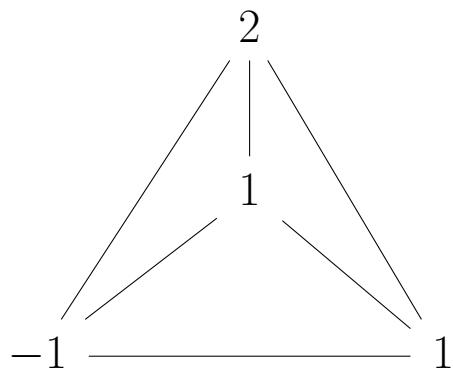
- l'or et les dettes se mesurent en caisses d'or, et l'or se transporte seulement en caisses complètement remplies ;
- les caravanes qui transportent l'or ne relient que certaines banques, et les banques peuvent donner de l'or seulement aux banques qui leur sont reliées par les caravanes.

Le grand Sultan du golfe écarlate, connu pour sa sagesse, veut que les banques soient traitées de la même manière. Il décide donc que :

- si une banque donne de l'or, elle doit en donner une caisse à chaque banque reliée.

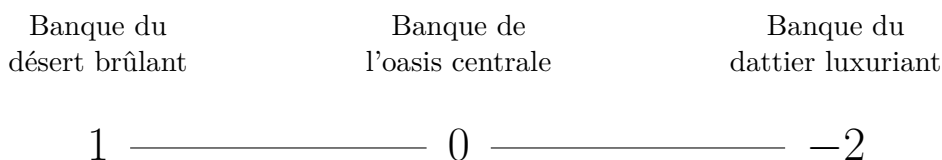
Le grand Sultan du golfe écarlate sera-t-il capable de régler les dettes de ses banques ?

1. Imaginons qu'il y ait quatre banques, deux à deux reliées par les caravanes. Supposons que les situations des caisses d'or soient les suivantes :



Serez-vous capables de résoudre le problème du grand Sultan du golfe écarlate ?

La situation des trois banques du désert empêche le grand Sultan de dormir.



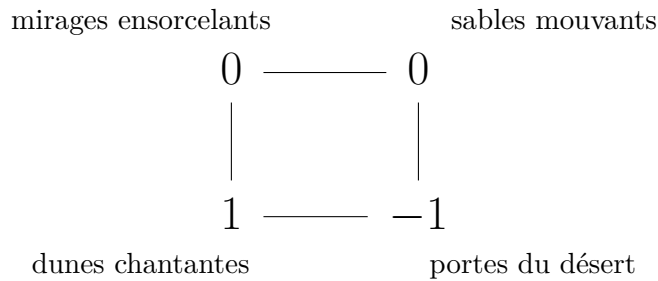
2. Malgré l'aide de tous ses savants, le grand Sultan n'arrive pas à régler la situation. Comprenez-vous pourquoi ?

Le grand Sultan se souvient qu'il y a quelques saisons sèches, la banque du désert brûlant et celle de l'oasis centrale étaient en dette, alors que la banque du dattier luxuriant ne l'était pas.

Il a oublié les comptes exacts, mais il rappelle que le nombre de caisses dans la réserve de la banque du dattier luxuriant était plus grand ou égal à la somme des dettes des deux autres.

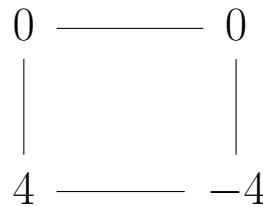
3. Le grand Sultan avait réussi à régler les dettes. Comment a-t-il fait ?

4. Et si c'étaient les banques du désert brûlant et du dattier luxuriant qui étaient en dette, et celle de l'oasis centrale avec de l'or, le grand Sultan aurait-il aussi pu résoudre le problème ?



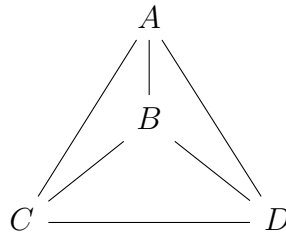
5. À votre avis, le grand Sultan pourra-t-il venir à bout de son problème ?

Le grand Sultan a une intuition : utiliser des caisses d'or quatre fois plus petites.



6. Le grand Sultan est très sûr de lui, mais ses savants le regardent perplexes. Pouvez-vous les aider à comprendre ?

1. On adopte les conventions suivantes :



et $AB^2C^3D^4$ signifie : A donne une fois, B donne 2 fois, C donne 3 fois, D donne 4 fois. (Remarque : comme ici on autorise des dettes, l'ordre des opérations n'a pas d'importance).

Le premier schéma en appliquant la règle à ABD . Pour le deuxième : C^2AD .

2. L'argent total doit être positif.
3. On appelle les sommets de la manière suivante :



et n_A, n_B, n_C l'argent sur chaque sommets. Hypothèses :

$$n_A + n_B + n_C \geq 0, \quad n_C \geq 0.$$

La stratégie est de mettre A à 0, de ramener toute la dette en B et puis donner ce qui manque avec C .

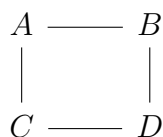
- $n_A, n_B \geq 0$: rien à faire.
- $n_A \geq 0$ et $n_B < 0$: $A^{n_A}C^{n_C}$.
- $n_A < 0$: $B^{-n_A}C^{-n_A+n_C}$.

4. Même stratégie que pour la question précédente.

- $n_A, n_C \geq 0$: rien à faire.
- $n_A < 0$ et $n_C \geq 0$ (ou $n_C < 0$ et $n_A \geq 0$) : c'est le deuxième cas de la question précédente. Si $n_A < 0$ et $n_C \geq 0$: $B^{-n_A}C^{-n_A+n_C}$.
- $n_A, n_C < 0$: $A^{-n_C}B^{-n_A-n_C}C^{-n_A}$.

5. Non. Puisque la somme totale de l'argent est 0, l'unique solution possible est d'avoir 0 partout. On remarque les termes diagonalement opposés n'ont pas la même parité. Cette propriété est préservée par les opérations qu'on fait, donc les termes ne pourront jamais être tous nuls.

6. On appelle les sommets de la manière suivante :



Solution : A^2BC^3 .