



Les banques du grand Sultan

Le grand Sultan du golfe écarlate fait face à un problème très sérieux : certaines banques de son royaume sont en dette et il n'a plus d'or à leur donner. Par contre, d'autres banques ont de l'or dans leur réserve et le grand Sultan pense à une redistribution pour régler les dettes.

Il y a des difficultés :

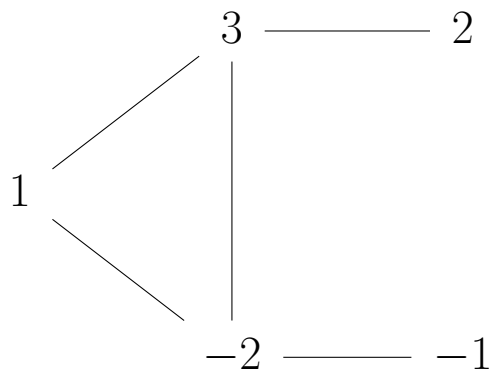
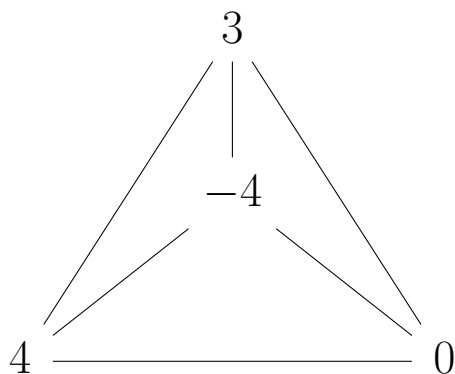
- l'or et les dettes se mesurent en caisses d'or, et l'or se transporte seulement en caisses complètement remplies ;
- les caravanes qui transportent l'or ne relient que certaines banques, et les banques peuvent donner de l'or seulement aux banques qui leur sont reliées par les caravanes.

Le grand Sultan du golfe écarlate, connu pour sa sagesse, veut que les banques soient traitées de la même manière. Il décide donc que :

- si une banque donne de l'or, elle doit en donner une caisse à chaque banque reliée.

Le grand Sultan du golfe écarlate sera-t-il capable de régler les dettes de ses banques ?

1. Imaginons être dans les situations suivantes :



Seriez-vous capables de résoudre le problème du grand Sultan du golfe écarlate ?

La situation des banques du chemin de fer empêche le grand Sultan de dormir : le chemin de fer compte 4 arrêts, et chaque arrêt a sa banque.



2. Malgré l'aide de tous ses savants, le grand Sultan n'arrive pas à régler la situation. Comprenez-vous pourquoi ?

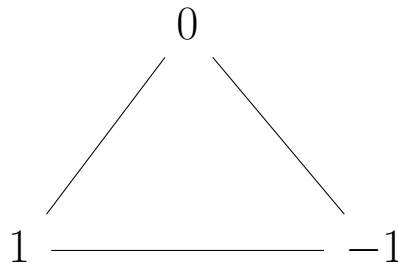
Le grand Sultan se souvient qu'il y a quelques saison sèches certaines banques du chemin de fer étaient en dette, mais le nombre total de caisses d'or, compte tenu des dettes, était positif. Autrement dit, si on désigne par n_i le nombre de caisses d'or dans la banque de l'arrêt i ,

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq 0.$$

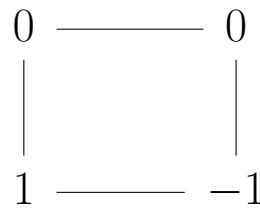
3. Le grand Sultan avait réussi à régler les dettes. Comment avait-il fait ?

4. Et si le chemin de fer avait eu 5 arrêts ? Ou 6 ?

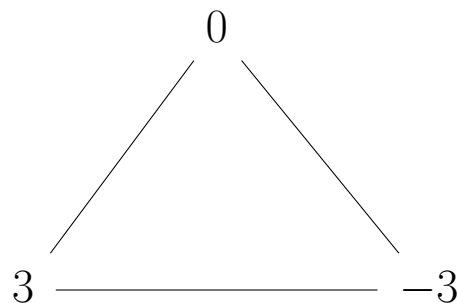
Supposons que les banques du grand Sultan se trouvent dans la situation suivante :



5. En raisonnant modulo 3, savez-vous montrer que le grand Sultan ne pourra pas régler son problème ?
6. Et s'il s'agissait d'un carré de banques ?



7. Le grand Sultan a une intuition pour résoudre le problème de la question (5.) : utiliser des caisses d'or trois fois plus petites.



Le grand Sultan est très sûr, mais ses savants le regardent perplexes. Pouvez-vous les aider à comprendre ?

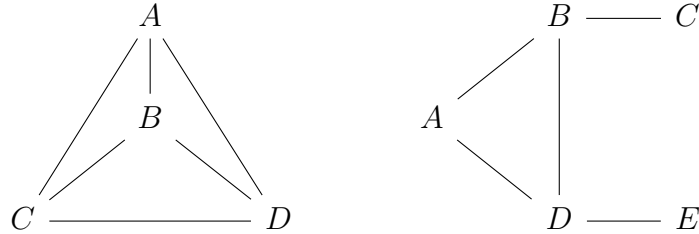
8. Est-ce que cela résout le problème aussi dans le cas d'un carré ?

Remarque générale. Quel que soit le graphe, si on fixe un sommet S , l'opération 'tous donnent sauf le S ' fait que :

- Tout reste pareil pour les sommets non voisins de S (ils donnent à chaque voisin qui leur en donne un aussi) ;
- Les voisins de S donnent à S .

C'est donc comme si S avait emprunté à chaque voisin.

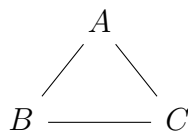
1. On adopte les conventions suivantes :



et $AB^2C^3D^4$ signifie : A donne une fois, B donne 2 fois, C donne 3 fois, D donne 4 fois. (Remarque : comme ici on autorise des dettes, l'ordre des opérations n'a pas d'importance).

Solution au premier schéma : C^2AD . Solution du deuxième : $A^2B^3C^5D$.

2. L'argent total doit être positif.
3. On appelle les sommets de la manière suivante : $A_1 \text{ — } A_2 \text{ — } A_3 \text{ — } A_4$.
L'idée est de ramener tout sur un sommet, par exemple A_4 .
On commence par annuler n_1 : $A_1^{n_1}$ si $n_1 \geq 0$, $A_2^{-n_1} A_3^{-n_1} A_4^{-n_1}$ si $n_1 < 0$.
On annule n_2 , en gardant $n_1 = 0$: $A_1^{n_2} A_2^{n_2}$ si $n_2 \geq 0$, $A_3^{-n_2}$ si $n_2 < 0$.
On termine avec : $A_1^{n_3} A_2^{n_3} A_3^{n_3}$ si $n_3 \geq 0$, $A_4^{n_3}$ si $n_3 < 0$.
4. Même stratégie que pour la question précédente.
5. La somme totale fait 0, donc l'unique solution possible est d'avoir 0 partout. Or, modulo 3, chaque opération revient à ajouter 1 partout car $-2 \equiv 1 \pmod{3}$. Les trois sommets ont donc des valeurs deux à deux distinctes modulo 3 à chaque étape. En particulier, ils ne peuvent pas valoir tous 0 en même temps.
6. Non. Puisque la somme totale de l'argent est 0, l'unique solution possible est d'avoir 0 partout. On remarque que les termes diagonalement opposés n'ont pas la même parité. Cette propriété est préservée par les opérations qu'on fait, donc les termes ne pourront jamais être tous nuls.
7. On appelle les sommets de la manière suivante :



Solution : B^2A .

8. Non. Le raisonnement de parité vu plus haut est encore valide.