LES MATHS FANTASTIQUES

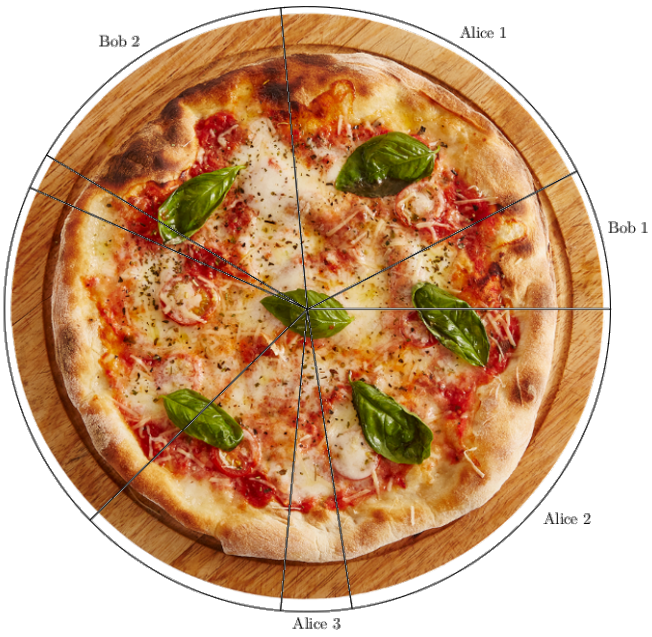
Comment manger beaucoup de pizza ?

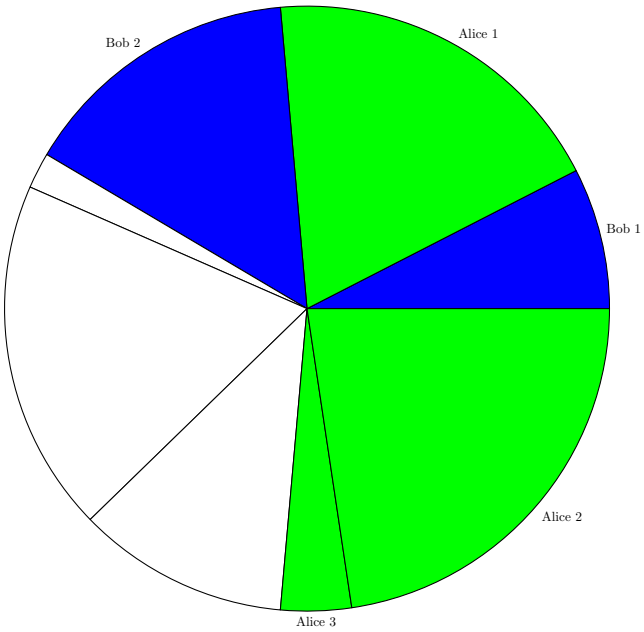
Alice et Bob ont très faim et ont acheté une excellente pizza à partager.

Bob propose de couper la pizza et de répartir les parts entre eux. Craignant la gourmandise de celui-ci, Alice suggère alors de procéder ainsi :

1. Bob découpe la pizza comme il le souhaite, pourvu que les parts soient des secteurs circulaires.
2. Alice choisit une part et la mange.
3. Chacun à son tour choisit une part adjacente à une part déjà mangée, et la mange.

Voici un exemple de début de partie :



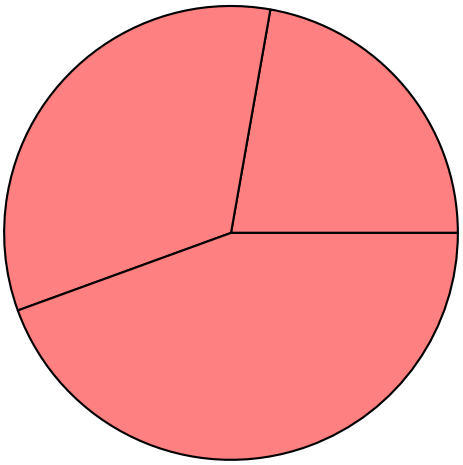


On se pose notamment les questions suivantes :

- Une fois la pizza découpée, quelle stratégie doit suivre Alice pour avoir le plus de pizza possible ?
- Dans tous les cas, quelle quantité minimale de pizza Alice peut-elle s'assurer ? Et si le nombre de parts est fixé ?
- Comment Bob doit-il couper la pizza pour avoir le plus de pizza possible ?

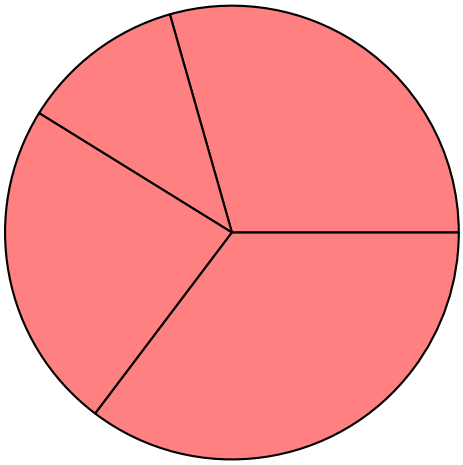
Dans toute la suite, on notera N le nombre de parts de pizza découpées par Bob.

1. **Jouer d'abord quelques parties pour se familiariser avec les règles du jeu, en utilisant les pizzas fournies.**
2. **Quelles sont les stratégies à suivre si $N = 1$ ou $N = 2$?**
3. **On suppose maintenant $N = 3$.**

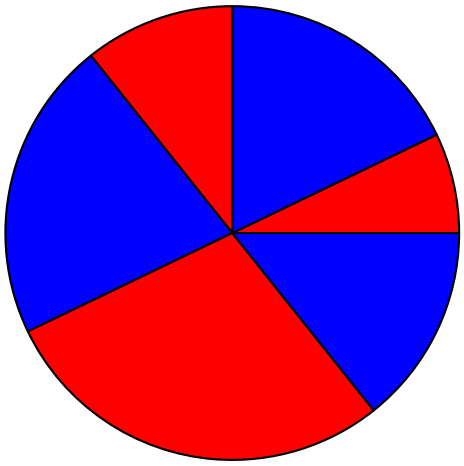


Quelle quantité de pizza Alice peut-elle manger avec certitude, quel que soit le découpage ? Proposer un découpage qui permette à Bob d'avoir (presque) le plus de pizza possible.

4. **Mêmes questions pour $N = 4$. Essayez vos stratégies sur des exemples.**



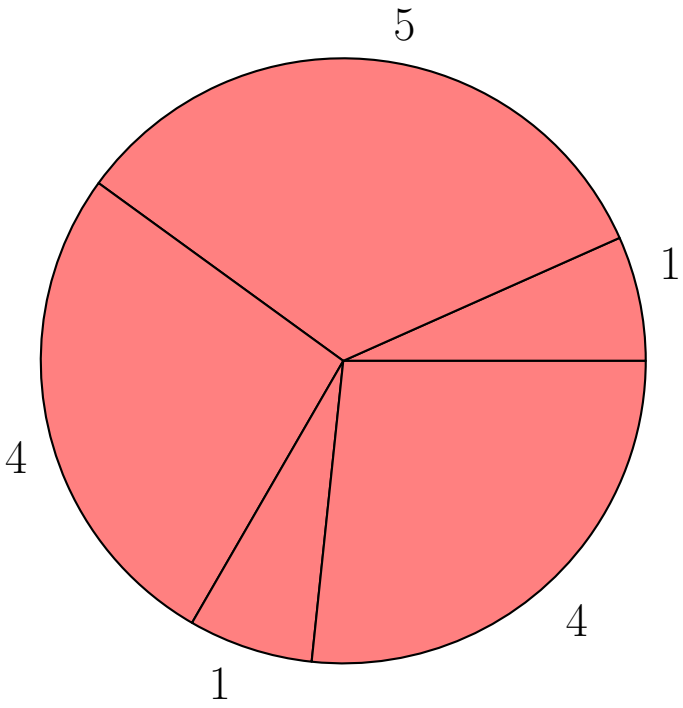
5. **Mêmes questions pour $N = 6$. On pourra colorier la pizza en alternant deux couleurs :**



6. **En s'inspirant du desin précédent, que peut-on dire quand le nombre de parts N est pair ? Qui a une stratégie pour manger plus (ou autant) que son adversaire, quel que soit le découpage ?**

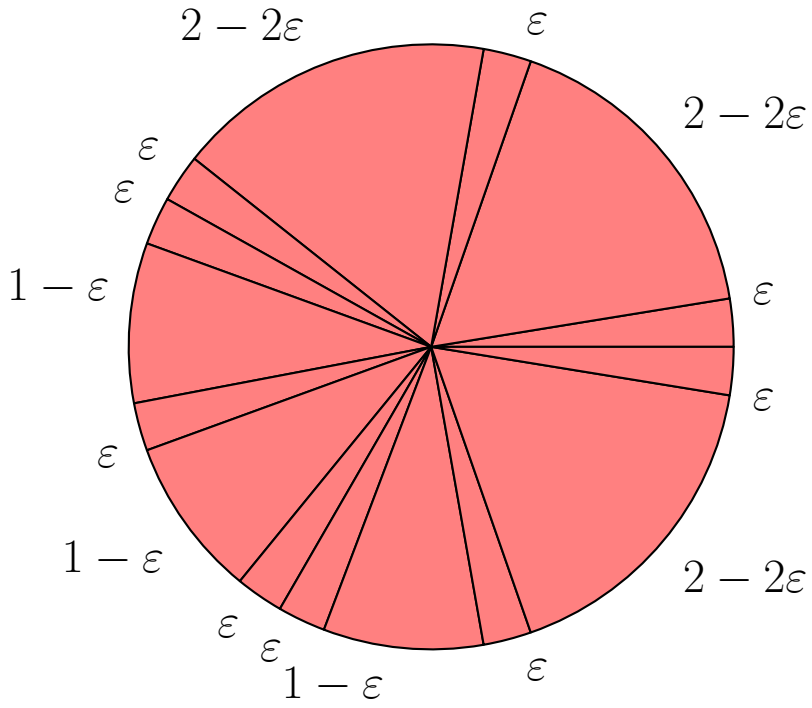
7. **Pour tout $N \geq 2$, expliquer comment Bob peut découper la pizza pour s'assurer (presque) la moitié de la pizza. On pourra distinguer les cas N pair et N impair.**

8. **Supposons maintenant $N = 5$. Alice propose une stratégie gourmande : à chaque étape, manger la part disponible la plus grosse. Est-ce une bonne stratégie ? Peut-elle faire mieux ? Comment ? On pourra regarder l'exemple suivant :**

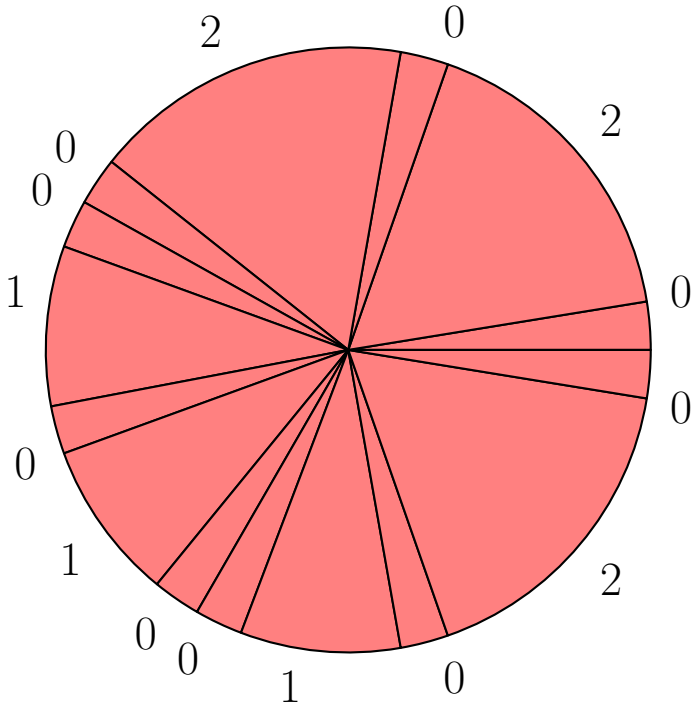


9. **Pour $N = 5$ et $N = 7$, Alice essaie une nouvelle stratégie, qui consiste à bien choisir la première part, puis à suivre Bob : à chaque étape, elle choisit la part qui suit celle que Bob vient de manger. Essayer cette stratégie sur des exemples. Qu'en pensez-vous ?**

10. **Pour $N = 15$, on considère le découpage suivant (voir aussi les "vraies" pizzas sur le stand), où ε est un nombre positif très petit (celles et ceux qui acceptent des parts de taille nulle peuvent prendre $\varepsilon = 0$) :**



ou



Aidez Alice à manger presque la moitié (4 points sur 9) de cette pizza. Peut-elle faire mieux (si Bob est intelligent) ? Essayez de vérifier que ce découpage permet à Bob de toujours manger plus de la moitié de la pizza (au moins 5 points sur 9).