



Savez-vous compter les trous ?

Le but de l'atelier est de tester sur des exemples concrets le lien entre la topologie d'une surface (compacte) et la caractéristique d'Euler.

Cette caractéristique d'Euler d'une surface est calculée à partir du découpage de cette surface en faces polygonales. Si on note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces de ce découpage, la caractéristique d'Euler est définie par la somme alternée

$$\chi = S - A + F.$$

On peut démontrer (et c'est un théorème) que cette quantité est indépendante du découpage choisi.

Il s'avère que cette quantité est reliée à la topologie de la surface par la formule suivante : si on note g le nombre d'anses de la surface, et t le nombre de ses trous, alors

$$\chi = 2 - 2g - t.$$

J1 On doit toujours tomber sur $S - A = 0$.

J2 On doit toujours tomber sur $S + F - A = 1$.

J3 Astuce pour compter les arêtes sans se tromper : on commence par compter celles de chaque composante de bord, puis celles situées à l'intérieur de la figure. Voici la correction du tableau :

Numéro de la figure	Nombre d'arêtes A	Nombre de faces F	Nombre de sommets S	$S + F - A$
1	12	4	8	0
2	16	6	10	0
3	20	7	12	-1

O1, B1 L'étape 1 du orange et du bleu est contenue dans les corrections des J1, J2, J3.

O2.1, B2.1 Pour rappel, il y a 5 solides réguliers « platoniciens » : le tétraèdre, qui possède 4 faces triangulaires, l'octaèdre ou le cube qui possède 6 faces carrées, l'octaèdre qui possède 8 faces triangulaires, le dodécaèdre qui possède 12 faces pentagonales, et l'icosaèdre qui possède 20 faces triangulaires.

O2.2, B2.2 On retombe à chaque fois sur $S + F - A = 2$.

O3, B3 Le but est de retrouver la formule

$$S - A + F = \chi = 2 - 2g - t$$

à l'aide de la construction de surfaces en pantalon découpées en faces polygonales.