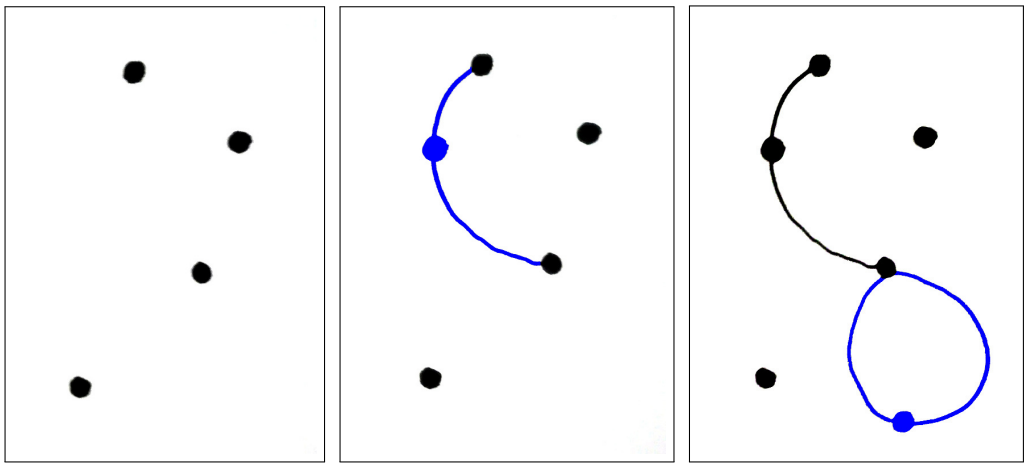
Les pousses poussent

Voici les règles d'un jeu qui se joue à deux, à l'aide d'un papier et d'un crayon. Placez des points sur la feuille (autant que vous voulez). Chacun leur tour, les joueurs doivent relier deux points avec une ligne et placer un nouveau point sur cette ligne. On peut aussi relier un point à lui-même par une ligne, et ajouter un point dessus.



Deux règles à respecter :

- les lignes ne doivent jamais se croiser,
- d'un même point ne peuvent pas partir plus de 3 lignes.

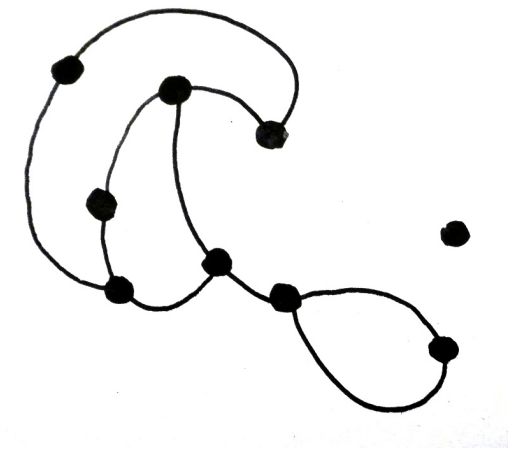
Le premier joueur qui ne peut plus jouer en respectant ces règles a perdu.

Premiers essais

1. Mettez-vous deux par deux, placez 4 points sur une feuille, et jouez ! Combien de coups votre partie a-t-elle duré ?

Au début, les points ont 3 *degrés de liberté* : de chacun pourraient éventuellement partir 3 lignes. Quand on trace une ligne partant d'un point ou y arrivant, il perd un degré de liberté.

2. **Comptez les degrés de liberté de tous les points sur le dessin suivant :**



Combien vaut la somme de tous ces degrés de liberté ?

Parties longues

3. **On place n points sur la feuille. Avant de démarrer la partie, combien cela fait-il de degrés de liberté en tout ? Quand on joue un coup, que devient ce nombre de degrés de liberté ?**

4. **Déduisez-en qu'une partie dure au plus $3n - 1$ coups.**

5. **Trouvez un exemple de partie, partant de n points, qui dure exactement $3n - 1$ coups.**

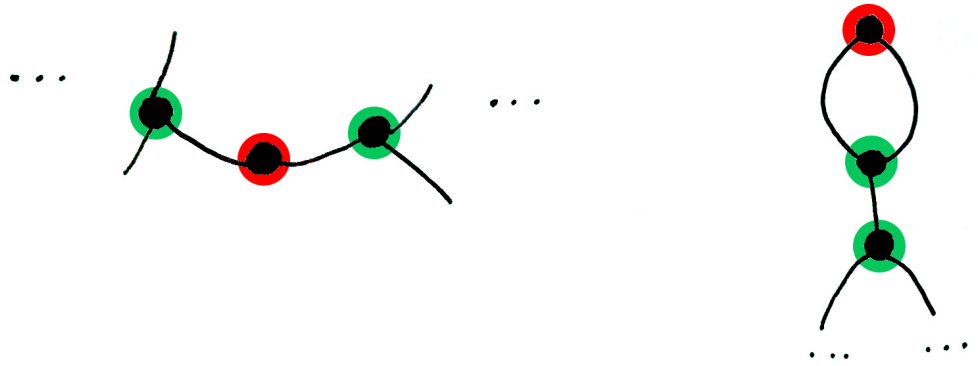
Parties courtes

Notre but maintenant est de trouver des parties durant le moins possible.

6. **Quand la partie est terminée, peut-il encore rester des points avec 3 degrés de liberté ? Avec 2 degrés de liberté ? Avec 1 degré de liberté ?**

À la fin d'une partie, on colorie en rouge les points qui ont encore un degré de liberté, en vert ses deux voisins. On laisse en blanc les autres points.

Quand le point rouge est sur une boucle, on va chercher un peu plus loin le voisin suivant, comme sur le schéma en bas à droite :



7. **Jouez une partie et, quand elle est terminée, coloriez ses points comme expliqué ci-dessus. Remplir le tableau**

nombre de...						
points au départ n	**coups joués** k	**points au total** p	**points rouges** r	**points verts** v	**points blancs** b	$3r+b$

8. **Pouvez-vous expliquer pourquoi on a toujours, à la fin d'une partie :**

$$p = n + k = 3r + b \quad ?$$

9. **En considérant le nombre total de degrés de liberté à la fin du jeu, montrez que l'on a :**

$$3n - k = r$$

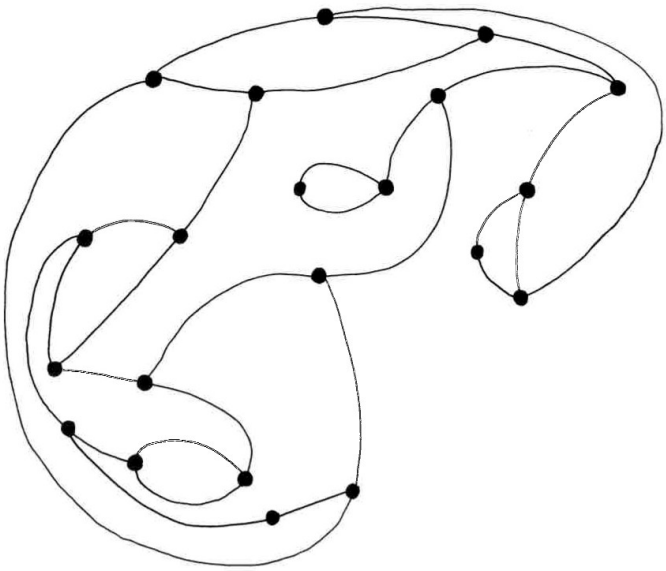
10. En utilisant les deux questions précédentes, arrivez-vous à établir la relation suivante ?

$$k = 2n + \frac{b}{4}$$

11. Déduisez-en qu'une partie dure au moins $2n$ coups. Pouvez-vous, pour tout n, trouver une partie qui dure exactement $2n$ coups ?

Partie mystère

On retrouve une feuille avec une partie déjà jouée.



12. Pouvez-vous deviner combien il y avait de points au départ et quel joueur a gagné ?

13. Pouvez-vous reconstituer les coups d'une partie qui aboutit exactement à ce dessin ?