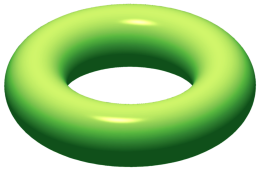
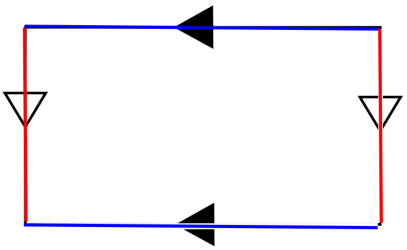
Möbius, tore

et jeux de morpion

À quoi vous fait penser cet objet ?

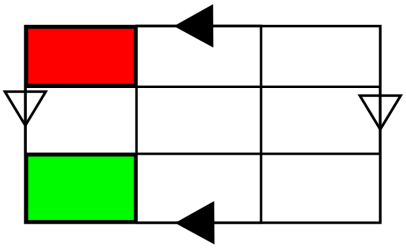


On pourrait essayer de le « fabriquer » avec une bande de papier, en recollant les côtés opposés (de même couleur sur la figure) ensemble :

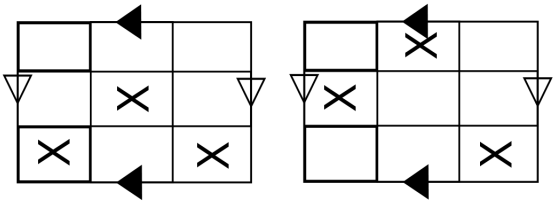


Mais le papier est trop rigide...

Nous avons imprimé une grille pour jouer au « morpion », mais sur la surface du tore au lieu d'un plan. Il faut penser que les côtés marqués de la même flèche sont recollés, donc par exemple, sur la figure suivante, la case verte et la case rouge sont adjacentes.



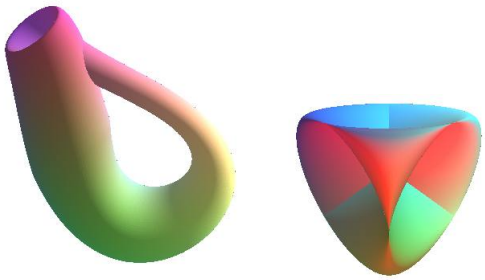
Parmi les deux configurations ci-dessous, l'une d'entre elles représente une position gagnante pour le morpion sur le tore. Laquelle ?



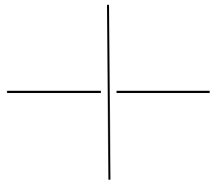
C'est pour cela que les grilles que nous avons imprimées sont utiles ! Prenez-en deux, et recopiez chacune des deux configurations précédentes dans chaque carré 9×9. Voyez-vous maintenant quelle position est gagnante ?

Trouvez un adversaire et jouez !

Connaissez-vous ces objets ?

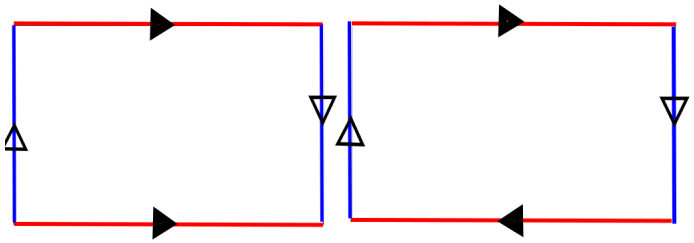


Théoriquement, le mathématicien peut les obtenir aussi en recollant les côtés d'une bande de papier, mais le recollement ne peut pas se faire sans se recouper (on dit qu'ils ne « vivent » pas dans l'espace ambiant à 3 dimensions...). Plus précisément, si vous voulez dessiner deux fils qui passent l'un par-dessus l'autre, votre dessin ressemblera à cela :



Le « trou » que vous avez dessiné au milieu du fil horizontal donne un effet de perspective, il donne l'impression que le fil vertical passe *au-dessus* du fil horizontal. Mais vous dessinez sur une feuille de papier : « au-dessus » n'a aucun sens ! Il n'y a pas de hauteur, car vous dessinez en deux dimensions quelque chose qui « vit » en trois dimensions. Sur le dessin, vous faites tout pour montrer que les deux fils ne se coupent pas dans la réalité, mais projetés sur la feuille, ils se coupent.
C'est pareil pour ces objets, regardez la bouteille de Klein par exemple : au moment où l'anse « rentre » à l'intérieur de la bouteille, il faut imaginer qu'elle ne traverse pas le bord de la bouteille, mais qu'elle passe par une quatrième dimension. C'est pourquoi on ne peut pas la matérialiser fidèlement. Mais le mathématicien aime y penser comme un recollement d'une bande, comme indiqué ci-dessous, qui, lui, est fidèle à la réalité.

Voici les deux recollements, le premier est donc la bouteille de Klein, et le deuxième s'appelle « le plan projectif ».



De la même façon que sur le tore, on peut jouer au morpion sur ces surfaces, grâce aux grilles imprimées jointes. Attention, le jeu est plus compliqué maintenant ! Chaque croix/cercle que vous jouez doit être marqué d'abord dans le carré central, puis dans les autres carrés suivant la règle suivante : on fait une translation verticale ou horizontale de 3 cases, puis, si les deux côtés correspondants (rouges si translation verticale, bleus si translation horizontale) ont été recollés dans le sens contraire, faire une symétrie par rapport à l'axe indiqué en pointillés.

Que pensez-vous du jeu sur notre plan projectif ?