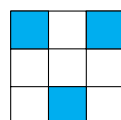
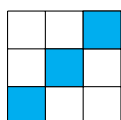
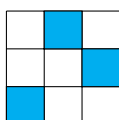


Explications de l'activité **Zombies**

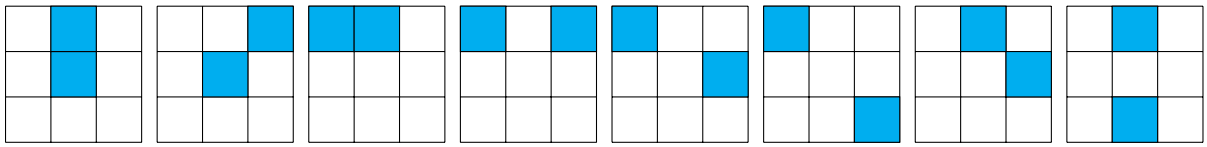
Bien s'assurer au départ que le principe est compris, notamment la propagation sur des exemples simples.

1. Il faut au moins deux cases colorées initialement pour colorer entièrement un quadrillage 2×2 , car avec une seule il n'y a pas de propagation. De plus, il existe une disposition de deux cases colorées qui permet de colorer tout le carré (disposer les deux cases sur deux coins opposés). Par conséquent, le minimum est bien 2.
2. On trouve des solutions à trois cases colorées, par exemple :



Cette question permet de souligner les deux demandes : trouver une solution ET prouver qu'il n'y en a pas une "meilleure" avec seulement deux cases colorées au départ.

Pour prouver que deux cases colorées ne peuvent suffire à colorer tout le carré, on peut raisonner en exhibant toutes les façons de disposer deux cases colorées dans un quadrillage 3×3 . En tenant compte des symétries, on se ramène à étudier seulement quelques cas :



3. Trouver une solution en 4 cases colorées est possible (mais pas évidente, cela peut nécessiter du temps et de multiples essais, sauf quand on pense à la diagonale).

Montrer qu'il n'existe pas de solution en 3 cases n'est pas simple (il n'est pas raisonnable de se lancer dans l'étude de toutes les configurations possibles).

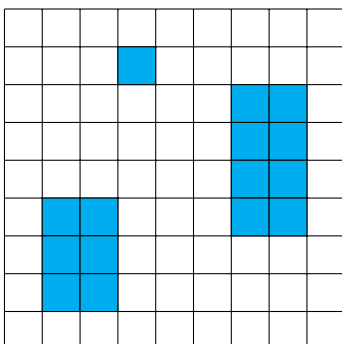
On a donc seulement prouvé, à la fin de cette question, que le nombre minimal cherché est au plus 4. Il est important de comprendre que ne pas avoir trouvé de solution avec 3 cases n'est pas une preuve que c'est impossible.

4. On trouve une solution avec 9 cases colorées en les plaçant sur la diagonale. De façon générale, pour un carré $n \times n$, il y a toujours une solution à n cases colorées : on dispose n cases colorées sur la diagonale (il peut y en avoir d'autres).

Pour aller plus loin

Les solutions sont directement écrites dans le cas général d'une taille $n \times n$ quelconque, les réponses ne sont pas plus simples dans le cas particulier $n = 9$.

5. Le périmètre de la zone colorée est $10 + 4 + 12 = 26$.



6. Dans tous les cas, le périmètre reste le même ou diminue, il ne peut pas augmenter (il est constant dans les cas a et d , diminue de 2 dans le cas b et de 4 dans le cas c).

Remarque : on a bien représenté toutes les différentes situations dans lesquelles une case devient colorée. Pour devenir colorée, une cellule doit être bordée par deux cellules colorées (cas a et d), ou trois (cas b) ou quatre (cas c).

7. Chaque case fournit au maximum un périmètre de 4, donc s'il y a $n - 1$ cases colorées, le périmètre est au maximum $4 \times (n - 1)$. (Pour $n = 9$, au plus $4 \times 8 = 32$).

8. Comme le périmètre de la zone colorée ne peut pas augmenter pendant la phase de propagation, à la fin le périmètre de la zone colorée est inférieur ou égal à $4(n - 1)$ (à 32 dans le cas $n = 9$).

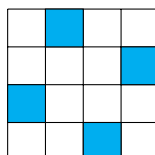
9. Le périmètre total de la ville est $4 \times n$ (pour $n = 9$, le périmètre est 36).

10. Le périmètre de la zone colorée est toujours strictement plus petit que celui de la ville, donc la ville ne peut pas être entièrement infestée.

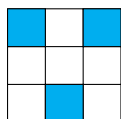
Finalement, on a donc une solution à n cases colorées (la diagonale), et la preuve qu'il n'y a pas de solution à $(n - 1)$. On a donc une preuve que notre solution est minimale.

Quelques remarques

Les élèves proposent souvent des conjectures fausses, d'où la nécessité de leur donner des contre-exemples. En particulier, le fait d'avoir une case colorée par ligne et par colonne n'est pas une condition suffisante pour infester la ville lorsque $n \geq 4$:



Ce n'est pas non plus une condition nécessaire, par exemple cette configuration en 3×3 convient :



Fiche pédagogique disponible sur :

<https://www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/fiches>