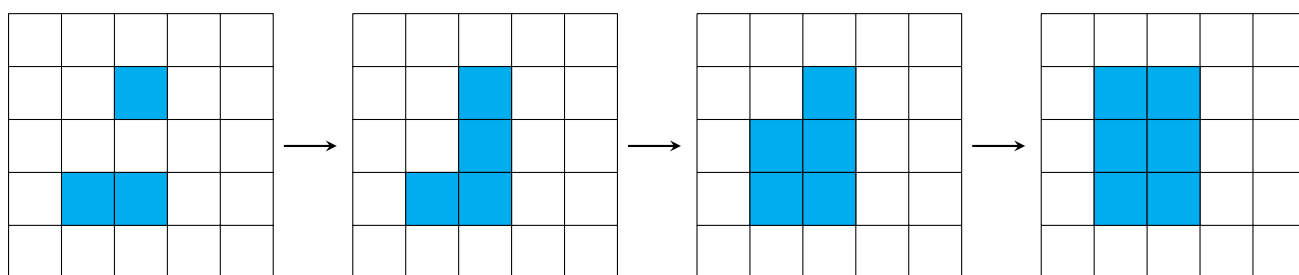


Description de l'activité

Zombies

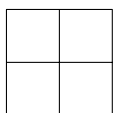
La ville d'Hollywood subit une invasion de zombies et nous voulons étudier leur propagation. Nous représentons la ville par un carré quadrillé, et colorons une case quand elle est infestée de zombies. La règle de propagation est la suivante : une case blanche (saine) est envahie par les zombies quand elle est « bordée » (un côté en commun) par au moins deux cases colorées (infestées). Si plusieurs cases peuvent être colorées, on les colore les unes après les autres.

Exemple de propagation :

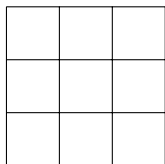


Dans cette activité, nous allons nous poser la question suivante, pour plusieurs tailles de villes : quel est le nombre minimal de cases infestées qu'il faut disposer au départ pour que, après un certain nombre d'étapes, la ville soit entièrement infestée ? Comment disposer ces cases infestées ?

1. Combien faut-il au minimum de cases colorées pour infester une ville de taille 2×2 ?



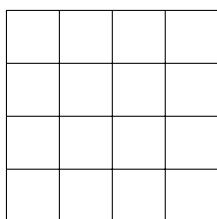
2. La ville est maintenant de taille 3×3 .



Essayez d'envahir la ville à partir du moins de cases colorées possible. Quelles solutions trouvez-vous ?

Pouvez-vous prouver que ce n'est pas possible avec strictement moins de cases colorées ?

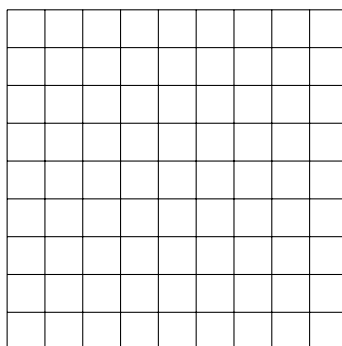
3. Arrivez-vous à infester toute une ville 4×4 en commençant avec 4 cases colorées ?



Y arrivez-vous avec seulement 3 cases colorées ?

Qu'est-ce que cela *prouve* sur le nombre minimal de cases colorées à placer pour infester une ville 4×4 ?

4. Prenons maintenant une ville plus grande, par exemple de taille 9×9 . Selon vous, quel est le minimum de cases colorées à placer pour l'infester ? Où choisissez-vous de les disposer ?



5. Avez-vous une idée pour infester une ville de taille quelconque $n \times n$ avec seulement n cases colorées au départ ?

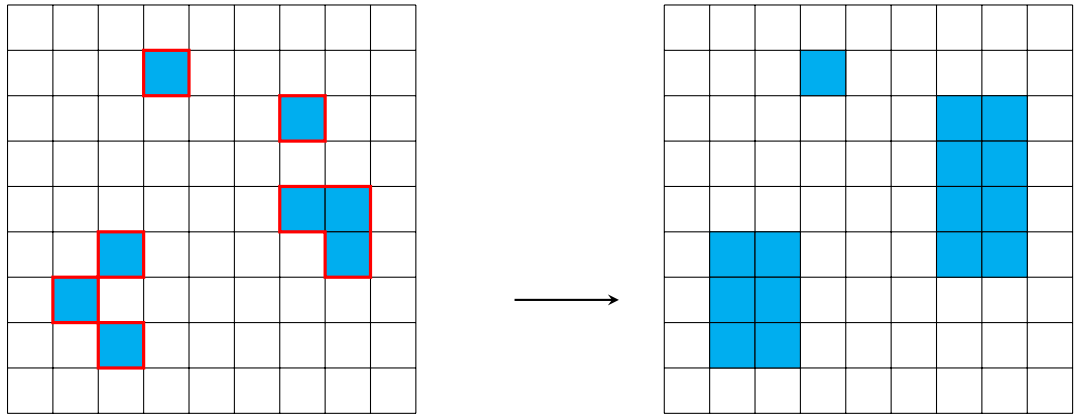
Pour aller plus loin

Nous allons maintenant démontrer qu'on ne peut pas infester une ville de taille 9×9 à partir de seulement 8 cases colorées.

On s'intéresse au *périmètre* des zones colorées.

6. Sur la grille de gauche ci-dessous, on a marqué en rouge les bords de la zone colorée. Leur longueur totale est le périmètre de la zone colorée, et il est égal à 28.

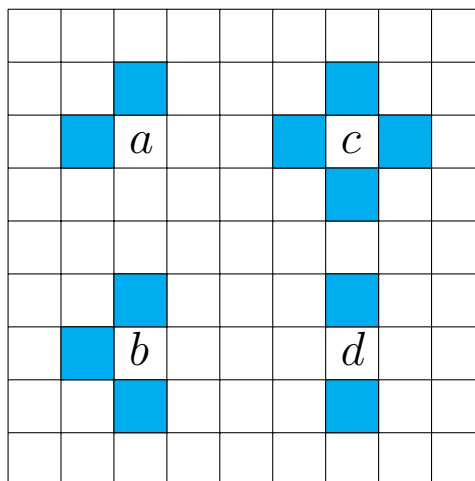
Sur la grille de droite, après la propagation, dessiner en rouge les bords de la zone colorée et calculer son périmètre.



Périmètre des zones colorées :

$$12 + 4 + 4 + 8 = 28$$

7. Voici toutes les façons possibles de colorer une nouvelle case :



Dans chaque cas a , b , c et d , dire si le périmètre augmente, reste le même, ou diminue lors de la propagation.

8. Imaginons que nous commençons avec seulement 8 cases colorées. Quel est le plus grand périmètre possible au départ (avant la propagation) pour la zone colorée ?
9. Quel est le plus grand périmètre possible pour la zone colorée à la fin de la propagation ?
10. Calculer le périmètre de la ville.
11. Conclusion : est-ce possible d'infester toute la ville avec seulement 8 cases colorées ?

Pour aller encore plus loin !

12. Faites la même démonstration dans le cas général d'une ville de taille $n \times n$, et démontrez que le nombre minimal de cases colorées nécessaires est n .