Explication de l'activité

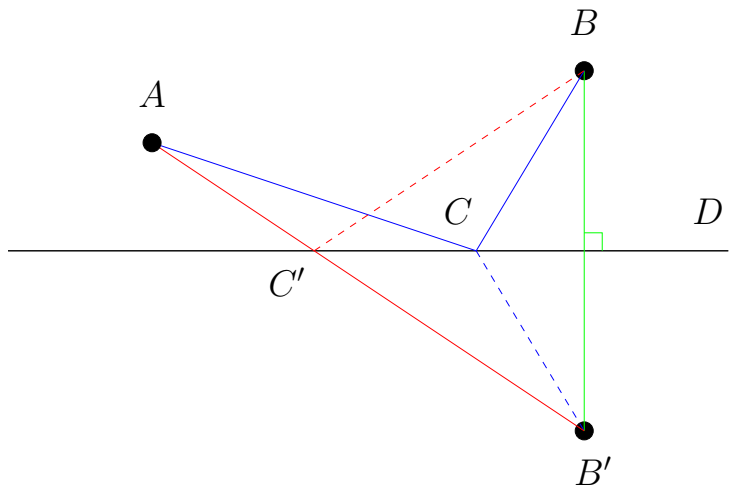
Grand froid sur la banquise !

Nous abordons ici les théorèmes isopérimétriques. La question est la suivante : quelle est la forme géométrique, dans le plan euclidien, qui maximise son aire à périmètre fixé ? Certains auront peut être l'intuition de la réponse : il s'agit du disque. Mais la démonstration de ce résultat est étonnamment complexe. Nous allons donc essayer de montrer un résultat plus simple, le théorème isopérimétrique pour les polygones, qui affirme que le polygone à n côtés de plus grande aire à périmètre fixé est le polygone régulier, c'est-à-dire le polygone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles sont égaux.

1 Chemin le plus court

Cette partie introduit un raisonnement qui nous sera utile par la suite. Le plus court chemin entre deux points A et B est le segment $[AB]$. Si ce segment coupe la droite D, il est donc également le plus court chemin entre A et B passant par D. Dans le cas contraire, considérons un chemin ACB de A à B coupant la droite D en un point C. Notons B' le symétrique de B par rapport à la droite D. Au chemin ACB on peut faire correspondre un chemin de A à B' : le chemin ACB'. Les chemins ACB et ACB' ont

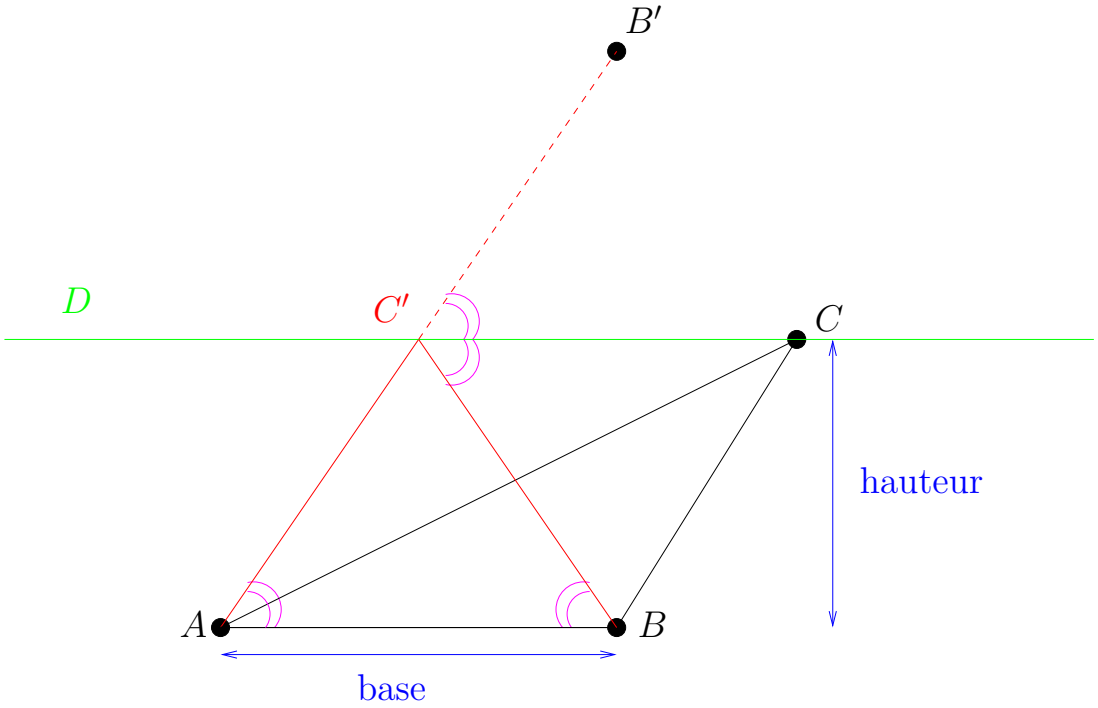
même longueur. Or le plus court chemin de A à B' est le segment $[AB']$, qui coupe la droite D en un point C'. Le plus court chemin de A à B qui coupe D est donc le chemin $AC'B$.



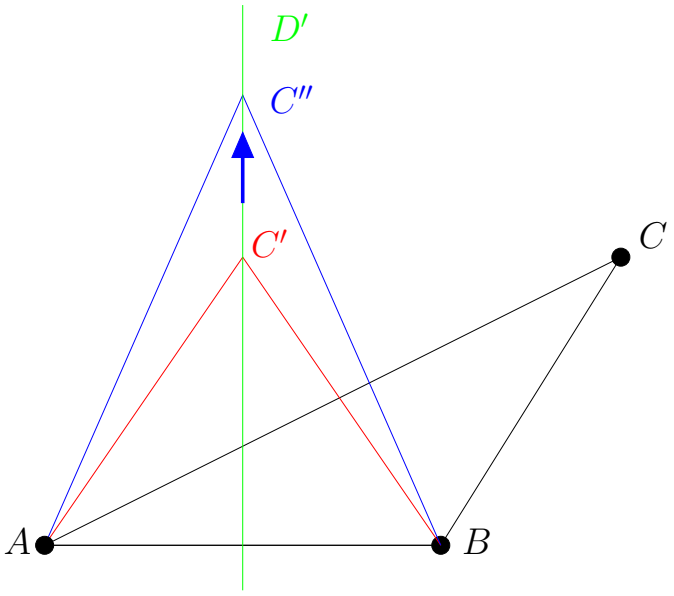
2 Triangle

L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la longueur de sa base par sa hauteur. Ce résultat peut être retrouvé en voyant le triangle ABC comme la moitié d'un parallélogramme. Ainsi, pour que le triangle conserve la même aire, il faut déplacer C de façon à ce que le triangle conserve la même hauteur, c'est-à-dire le long de la droite D qui est la parallèle à (AB) passant par C. Déplacer C le long de la droite D de façon à ce que le périmètre du triangle soit minimal revient exactement à trouver le point C' de D tel que le chemin $AC'B$ soit le plus court chemin de A à B passant par D : nous avons déjà vu comment faire dans la partie précédente ! Si B' est le symétrique de B par rapport à D, on trace le segment $[AB']$, il coupe D en un point C', et le triangle $AC'B$ est le triangle de même aire que le triangle ABC et qui a le plus petit périmètre possible. Or l'angle $\widehat{BAC'}$ est égal à l'angle $\widehat{CC'B'}$, qui est égal à l'angle $\widehat{BC'C}$, lui-même égal à l'angle $\widehat{ABC'}$. Le triangle ABC' que nous avons obtenu est donc isocèle en C'. Le triangle de base fixée $[AB]$ et d'aire fixée (celle du triangle ABC) qui a le

plus petit périmètre est donc le triangle ABC' qui est isocèle en C'.



Si on "tire vers le haut" le point C', c'est-à-dire si on le déplace le long de la médiatrice D' du segment $[AB]$, le périmètre et l'aire du triangle obtenu augmentent au fur et à mesure. Arrêtons-nous au point C'' quand le périmètre du triangle ABC'' obtenu est exactement celui de ABC. Le triangle ABC'' obtenu a même périmètre que ABC, mais une aire strictement plus grande que celle de ABC' (qu'il contient strictement) donc que celle de ABC. Remarquons qu'il est isocèle en C'' puisque C'' appartient à D'.

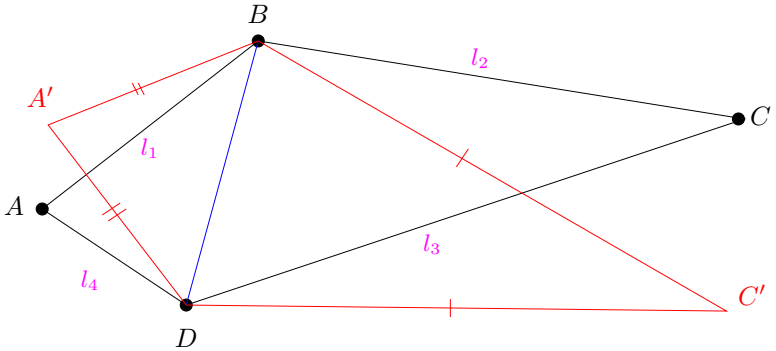


Soit ABE le triangle de base $[AB]$ et de même périmètre que ABC qui a la plus grande aire possible. Si ABE n'est pas isocèle en E, on peut comme précédemment déplacer E pour obtenir un triangle ABE' isocèle en E' de même aire que ABE mais de périmètre strictement plus petit, puis à nouveau déplacer E' pour obtenir un triangle ABE'' de même périmètre que ABE, donc que ABC, et d'aire strictement plus grande que ABE, qui était pourtant supposée maximale : c'est absurde. ABE est donc nécessairement isocèle en E, et donc il s'agit du triangle ABC'' (ou de son symétrique par rapport à la droite (AB)).
Autorisons-nous maintenant à déplacer également la base du triangle : on cherche le triangle EFG de même périmètre que ABC et de plus grande aire possible. Si EFG n'est pas équilatéral, deux de ses côtés sont de longueurs distinctes, par exemple $[EG]$ et $[FG]$. Alors en fixant E et F, on peut comme précédemment déplacer G pour obtenir un triangle de même périmètre que EFG (donc que ABC) mais d'aire strictement plus grande que celle de EFG, qui est pourtant supposée maximale : c'est absurde à nouveau. Le triangle solution du problème isopérimétrique est donc le triangle équilatéral.
Nous avons démontré le théorème isopérimétrique pour les triangles.

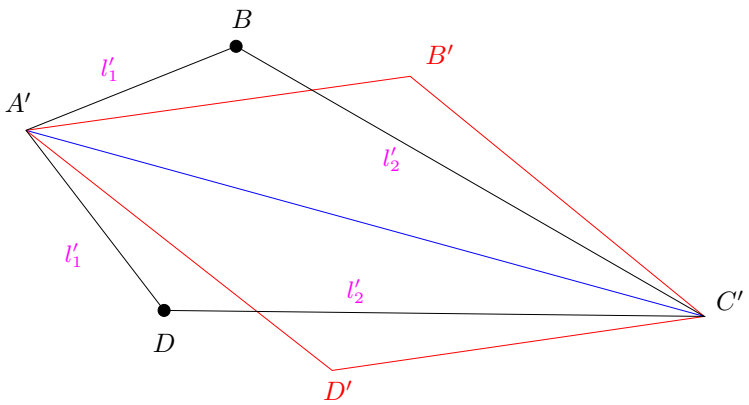
3 Quadrilatère

On commence par découper le quadrilatère $ABCD$ en 2 triangles ABD et BCD. Par la méthode que nous avons vue sur les triangles, si les segments $[AB]$ et $[AD]$ ne sont pas de même longueur, on peut déplacer le point A en A' de telle sorte que le triangle $A'BD$ soit isocèle en A', de même périmètre que ABD et d'aire strictement plus grande (maximale en fait à base et périmètre fixés). Si on note $l_i, i = 1...4$ les longueurs des côtés du quadrilatère $ABCD$ comme sur la figure, on obtient donc que les segments $[A'D]$ et $[A'B]$ ont pour longueur $l'_1 = \frac{l_1+l_4}{2}$. Si $[BC]$ et $[CD]$ ne sont pas de

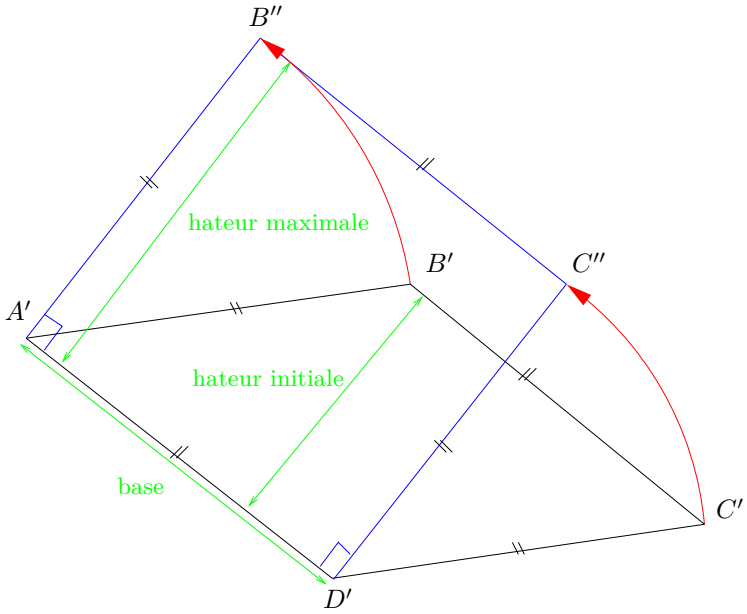
même longueur, déplaçons de même le point C en C' et notons $l'_2 = \frac{l_2+l_3}{2}$.



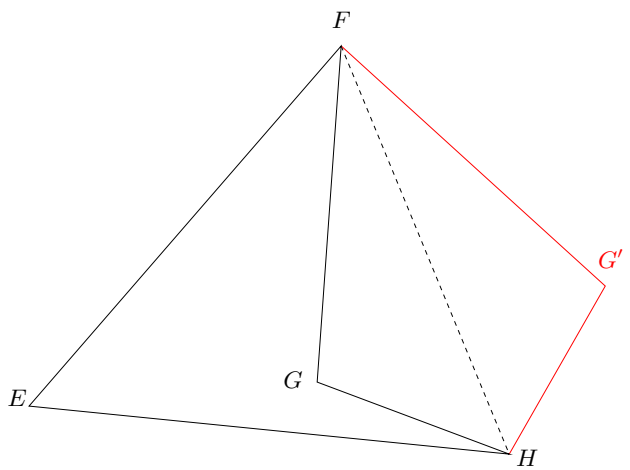
Ensuite, on découpe à nouveau le quadrilatère $A'BC'D$ en deux triangles $A'BC'$ et $A'DC'$, et en itérant la construction précédente on déplace de même B en B' et D en D'. Pourvu qu'au moins deux des côtés du quadrilatère initial $ABCD$ ne soient pas de même longueur, on obtient un nouveau quadrilatère $A'B'C'D'$ de même périmètre que $ABCD$ et d'aire strictement plus grande. De plus, chacun des côtés de $A'B'C'D'$ a pour longueur $\frac{l'_1+l'_2}{2} = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4}{4}$ donc il s'agit d'un losange.



L'aire de ce losange est égale au produit de sa base par sa hauteur. Quand on "déforme" le losange, c'est-à-dire quand on garde les longueurs de ses côtés fixées et qu'on modifie ses angles, on garde sa base constante et on modifie sa hauteur. Pour maximiser son aire, il faut donc maximiser sa hauteur. Le quadrilatère $A'B''C''D'$ dont les côtés ont même longueur que ceux de $A'B'C'D'$ et dont la hauteur, et donc l'aire, sont maximales est donc le carré.

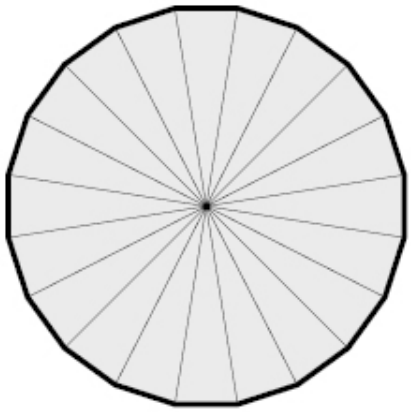


Soit $EFGH$ un quadrilatère de même périmètre que $ABCD$ et d'aire maximale. Si $EFGH$ n'était pas convexe, son aire ne pourrait pas être maximale : si par exemple c'est le point G qui était inclus à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $EFGH$, en notant G' son symétrique par rapport à (FH), alors $EFG'H$ aurait alors même périmètre que $EFGH$ et une aire strictement plus grande, ce qui est absurde, donc $EFGH$ est convexe. Si $EFGH$ n'était pas un losange, on pourrait lui associer comme précédemment un losange de même périmètre et d'aire strictement plus grande, alors qu'on a supposé que l'aire de $EFGH$ est maximale, donc $EFGH$ est nécessairement un losange. Si $EFGH$ n'était pas un carré, on pourrait le "déformer" comme précédemment pour obtenir un carré de même périmètre et d'aire strictement plus grande, donc $EFGH$ est nécessairement un carré.

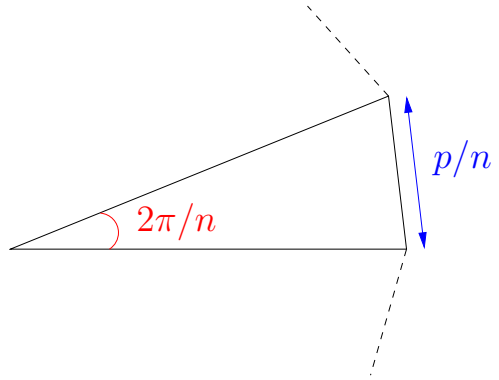


4 Pour aller plus loin

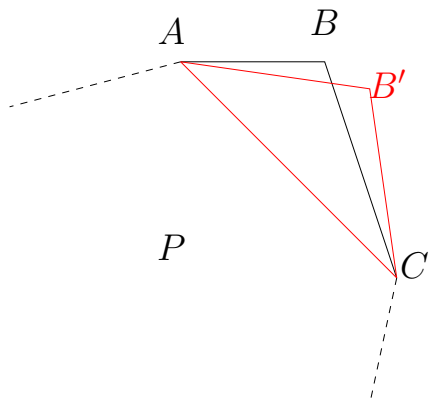
Le théorème isopérimétrique pour les polygones affirme que le polygone à n côtés de périmètre fixé et d'aire maximale est le polygone régulier, c'est-à-dire le polygone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles sont égaux. Nous venons de montrer les cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$.
Le polygone régulier à n côtés peut être découpé en n triangles de même aire, comme illustré sur la figure suivante.



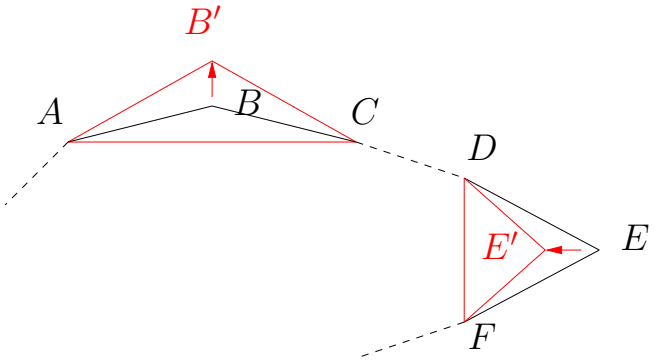
Si on note p le périmètre de ce polygone, on trouve par un calcul élémentaire que l'aire de chacun des petits triangles est $\frac{p^2}{4n^2 \tan(\pi/n)}$. L'aire du polygone régulier à n côtés (de périmètre p) est donc $a_n = \frac{p^2}{4n \tan(\pi/n)}$. Le disque de périmètre p a pour rayon $\frac{p}{2\pi}$ et donc pour aire $a = \frac{p^2}{4\pi}$. Puisque $\tan\theta > \theta$ pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$, on voit que $a_n < a$: le disque a une aire strictement plus grande que le polygone régulier à n côtés de même périmètre. Mais quand n tend vers l'infini, $\frac{\tan(\pi/n)}{\pi/n}$ tend vers 1, donc a_n tend vers a.
Nous allons donner ici les idées clés pour démontrer le théorème isopérimétrique pour les polygones, sans rentrer dans les détails. Considérons un polygone convexe P à n côtés de périmètre fixé et d'aire maximale. Supposons que tous les côtés de ce polygone ne sont pas de même longueur : alors il existe deux côtés adjacents $[AB]$ et $[BC]$ de longueur distincte. Mais en



considérant le triangle ABC, nous avons montré que nous pouvons déplacer B en B' pour obtenir un triangle $AB'C$ isocèle en B de même périmètre que ABC et d'aire strictement plus grande. Le polygone obtenu en remplaçant B par B' dans P a donc même périmètre que P mais une aire strictement plus grande, alors que nous avons supposé que P est d'aire maximale. P a donc tous ses côtés de même longueur.



Supposons à présent qu'il existe dans P deux angles $\widehat{ABC} > \widehat{DEF}$ non adjacents. En "tirant" B vers l'extérieur du polygone P et en "poussant" E vers l'intérieur de P, on peut déformer simultanément les 2 triangles ABC et DEF de façon à ce qu'ils restent tous deux isocèles et que la somme de leurs périmètres reste constante. En revanche la somme de leurs aires varie, et on peut trouver des points B' et E' tels que la somme des aires de $AB'C$ et $DE'F$ soit strictement plus grande que celle des aires de ABC et DEF, ce qui contredit encore la maximalité de l'aire de P. Ainsi chaque angle de P est égal à tous les autres angles de P sauf peut être ses deux angles adjacents.



Nous avons déjà montré le résultat pour $n = 3$ et $n = 4$. Supposons $n \geq 5$. Soient $\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux angles de P. S'ils ne sont pas adjacents, on a déjà montré que $\hat{A} = \hat{B}$. S'ils sont adjacents, puisque $n \geq 5$, il existe un autre angle $\hat{C}$ dans P qui n'est adjacent ni à $\hat{A}$ ni à $\hat{B}$, et alors on a montré que $\hat{A} = \hat{C} = \hat{B}$. Ainsi tous les angles de P sont égaux et donc P est bien le polygone régulier.

Pour conclure, considérons un polygone Q à n côtés non convexe, de périmètre p et d'aire a. Alors son enveloppe convexe Q' est un polygone convexe à n' côtés, $n' \leq n$, d'aire $a' > a$ et de périmètre $p' < p$. Or d'après le résultat précédent, a' est inférieure ou égale à $a_{n'}(p')$, l'aire du polygone régulier à n' côtés de périmètre p', et $a_{n'}(p') \leq a_n(p') \leq a_n(p)$, d'où $a < a_n(p)$, donc Q n'est pas solution du problème isopérimétrique.