

Explications de l'activité Chasse à la bête !

Nous utilisons 2 arguments différents, qui nous donnent respectivement une minoration et une majoration du nombre minimal N de pièges à poser pour protéger tout le plateau.

- D'une part, si on a trouvé une configuration à p pièges qui empêche toute bête de s'installer sur le plateau, alors $N \leq p$: le nombre minimum de pièges nécessaire est inférieur ou égal au nombre de pièges trouvé.
- D'autre part, si on arrive à placer q bêtes simultanément sur le plateau en l'absence de pièges, alors $N \geq q$ car, les bêtes ne se superposant pas, il faudra au moins un piège pour neutraliser chacune de ces q bêtes et l'empêcher de s'installer.

Si on arrive, pour un certain entier r , à empêcher toute bête de s'installer avec r pièges, *et* à placer (quand il n'y a pas de piège) r bêtes simultanément sur le plateau, nous avons alors répondu à la question et $N = r$.

Étape 1 : les dominos

1) Deux solutions émergent assez naturellement, en plaçant les pièges en quinconce (comme les cases noires ou blanches d'un plateau d'échec) : une solution à 13 pièges, et une solution à 12 pièges, suivant qu'on place un piège ou non dans les coins du plateau (voir figure 1). Nous avons trouvé

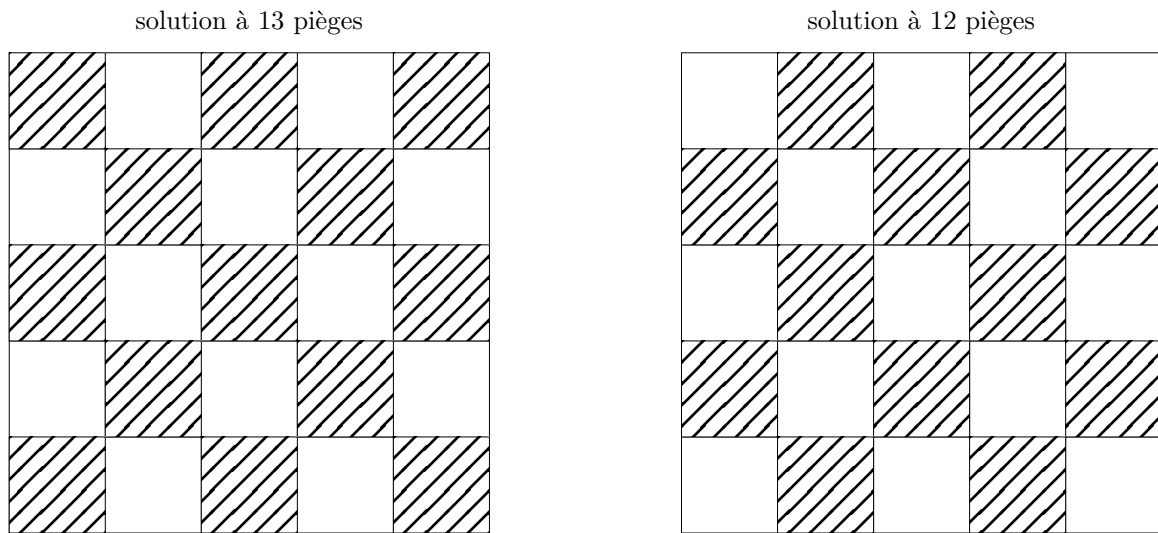


FIGURE 1 – deux configurations de 13 et 12 pièges qui protègent tout le champ des bêtes en forme de dominos.

une solution à 12 pièges, reste à savoir si 12 est le nombre *minimum* de pièges nécessaires pour protéger le champ : peut être pourrait-il exister une solution à 11 pièges à laquelle nous n'avons pas pensé. A ce stade nous obtenons donc une majoration de N : $N \geq 12$.

2) On peut, de bien des façons, placer 12 bêtes sur le plateau, par exemple dans la configuration représentée en figure 2. En passant, nous pouvons

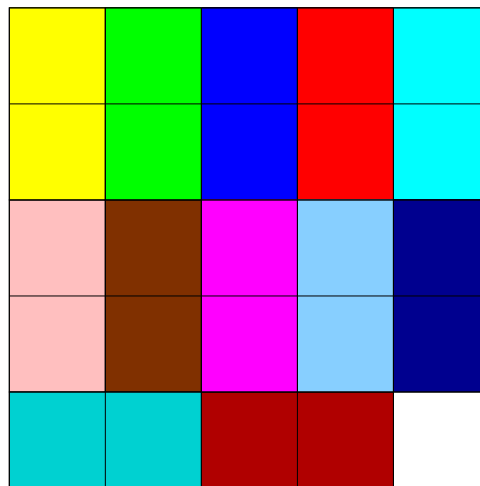


FIGURE 2 – un exemple de placement de 12 bêtes dominos dans le champ (les différentes bêtes sont représentées de différentes couleurs).

nous demander si nous pouvons en placer plus : non, car pour se poser, 13 bêtes auraient besoin de 26 cases. Le nombre *maximal* de bêtes qui peuvent

s'installer dans le champ simultanément est donc 12.

Revenons à notre question : peut-il exister une solution à 11 pièges (ou moins), alors que 12 bêtes peuvent se poser simultanément dans le champ ? La réponse est non, car 11 pièges neutraliseront au plus 11 bêtes, et donc au moins une de nos 12 bêtes sur le plateau restera libre de s'installer. Nous avons donc montré qu'il faut *au moins* 12 pièges pour protéger tout le plateau : $N \geq 12$.

3) Nous avons obtenu l'encadrement $12 \leq N \leq 12$, donc $N = 12$: le *nombre minimal* de pièges à poser pour protéger tout le champ dans le cas des bêtes en forme de dominos est 12.

Étape 2 : les triminos droits

4) Pour essayer de placer les pièges de façon assez méthodique, on peut suivre par exemple une des deux stratégies suivantes :

- espacer le plus possible les pièges les uns des autres : cela conduit à des solutions "en quinconce" qui ressemblent à la solution pour les bêtes en forme de domino, voir la première solution présentée dans la figure 3, *ou*
- raisonner d'abord ligne par ligne (combien faut-il au minimum de pièges pour éviter qu'une bête ne s'installe sur la première ligne, et où faut-il la placer ? et sur les autres lignes ?) puis colonne par colonne : cela conduit à une solution "en croix", voir la deuxième solution dans la figure 3.

Ainsi, on peut protéger tout le champ à l'aide de 8 pièges seulement. Le *nombre minimal* de pièges pour protéger le champ est donc inférieur ou égal à 8 : $N \leq 8$.

5) En ce qui concerne le placement des bêtes, il est assez facile d'en placer 7 sur le plateau, par exemple en plaçant une bête horizontalement à gauche de

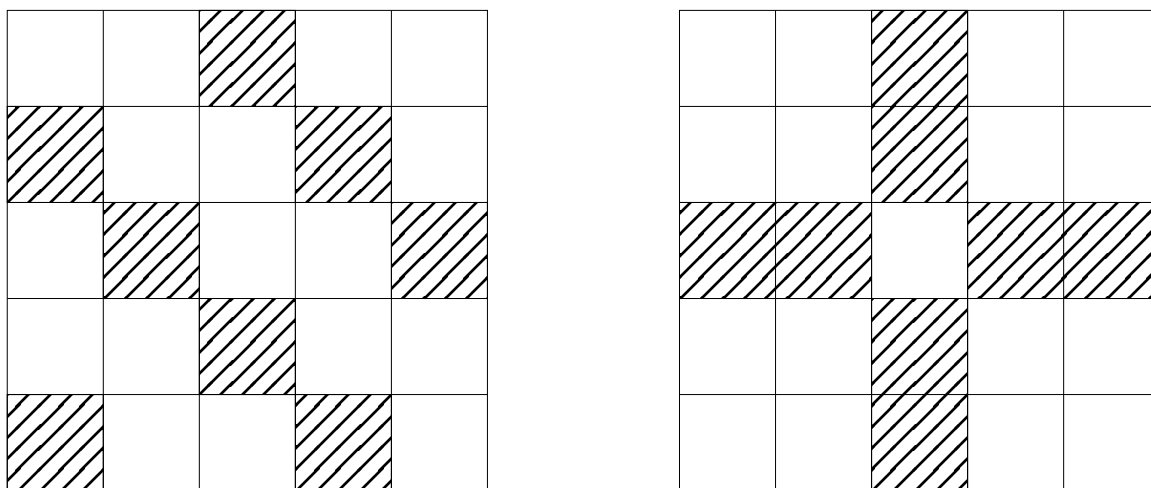


FIGURE 3 – deux configurations de 8 pièges qui protègent tout le champ des bêtes en forme de triminos droits.

chaque ligne, puis une bête verticalement dans chacune des deux colonnes de droite (voir figure 4). Il reste alors 4 cases vides dans le champ, mais

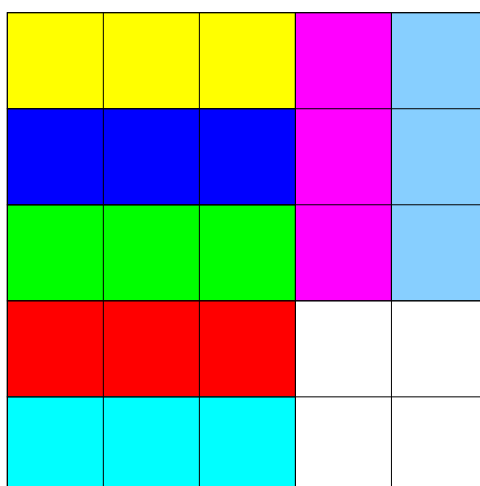


FIGURE 4 – un exemple de placement de 7 bêtes en forme de triminos droits dans le champ (les différentes bêtes sont représentées de différentes couleurs).

elles sont placées dans un carré 2x2, ce qui ne permet pas à une bête de s'y installer. Peut-on placer une 8^{ème} bête sur le plateau? La réponse est oui, comme illustré sur la figure 5. Il faut donc au moins 8 pièges pour protéger le champ : $N \geq 8$. Nous pouvons remarquer que nous ne pourrions pas placer plus de 8 bêtes dans le champ, car il ne reste qu'une seule case libre, alors qu'il en faudrait au moins 3 pour qu'une autre bête s'installe. Le nombre *maximal* de bêtes qu'on peut placer dans le champ est donc 8.

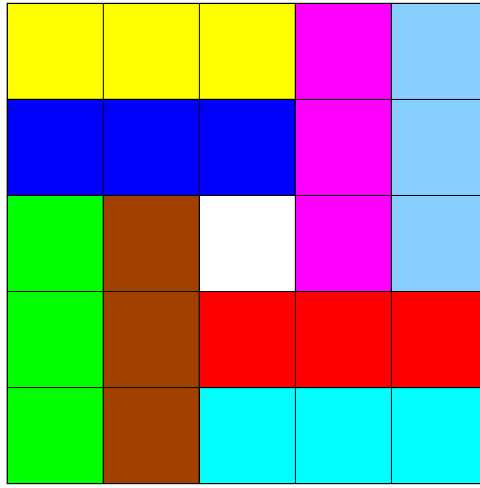


FIGURE 5 – un exemple de placement de 8 bêtes en forme de triminos droits dans le champ (les différentes bêtes sont représentées de différentes couleurs).

6) On en déduit que dans le cas des bêtes en forme de triminos droits, $N = 8$.

Étape 3 : les triminos coudés

7) Dans le cas des bêtes en forme de triminos coudés nous pouvons placer sur le plateau 8 bêtes simultanément, mais nous n'arrivons pas à exhiber une configuration de pièges qui protège le champ avec moins de 10 pièges (voir figure 6 pour un exemple de placement des bêtes et de configuration des pièges). Nous obtenons donc l'encadrement suivant : $8 \leq N \leq 10$. Cette

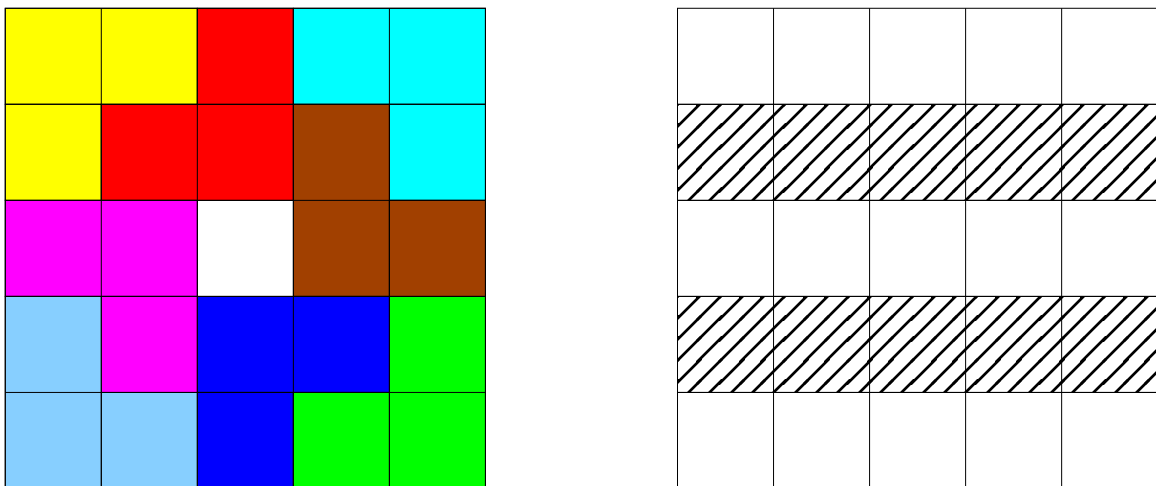


FIGURE 6 – un exemple de placement de 8 bêtes en forme de triminos coudés dans le champ, et une configuration de 10 pièges qui protègent tout le champ des bêtes en forme de triminos coudés.

méthode ne permet pas de conclure !

8) Dans chaque partie du champ de taille 2×2 , il faut placer au moins deux pièges pour protéger précisément cette partie du champ de toute bête - si nous plaçons un seul piège, il reste exactement la place suffisante pour qu'une bête se pose. Nous pouvons délimiter dans le champ 4 zones de taille 2×2 disjointes, ce qui implique qu'il faut au moins 8 pièges pour protéger le champ. En fait, en plaçant astucieusement ces 4 zones de taille 2×2 dans le champ (comme par exemple sur la figure 7 à gauche), on s'aperçoit que 2 bêtes peuvent encore se poser dans la partie du champ qui n'est pas recouverte par ces 4 carrés de taille 2×2 (voir sur la figure 7 à droite). Il faut donc 2 pièges supplémentaires pour empêcher ces 2 bêtes de se poser, soit au total 10 pièges minimum pour protéger le champ : $N \geq 10$. On conclut que $N = 10$.

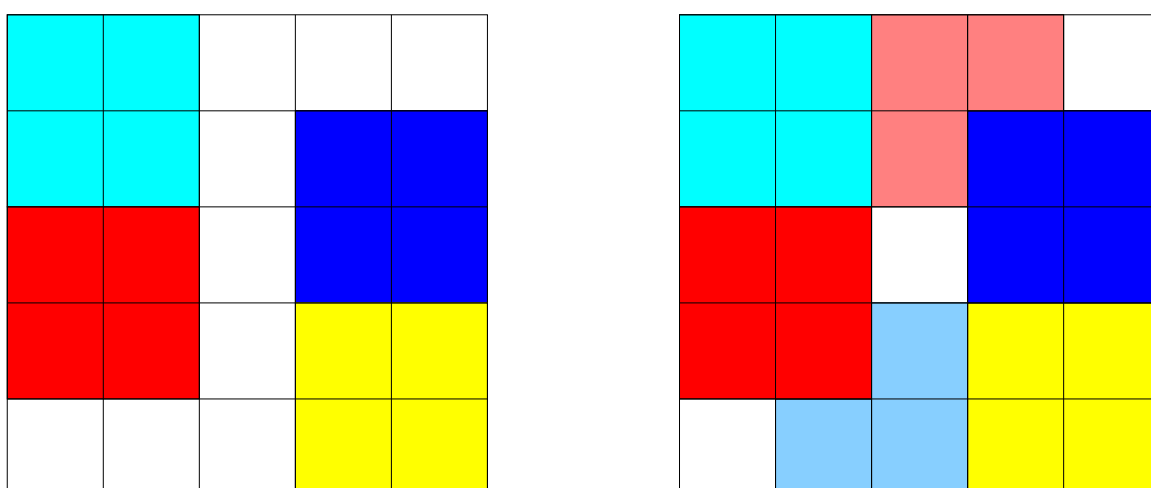


FIGURE 7 – à gauche quatre zones de taille 2×2 disjointes sont identifiées par des couleurs différentes dans le champ ; à droite deux bêtes sont placées dans la partie du champ qui n'est pas recouverte par ces blocs de taille 2×2 .

Commentaire

La "chasse à la bête" a été conçue dans un objectif de vulgarisation des mathématiques à l'occasion de la thèse en mathématiques discrètes d'Éric Duchêne encadrée par Sylvain Gravier. Elle a été étudiée d'un point de

vue didactique par l'équipe de recherche "Maths à modeler" de Grenoble en lien avec l'IREM de Grenoble. On pourra en voir une présentation, ainsi qu'une présentation de problèmes de pavages, faite par Denise Grenier à cette adresse :

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/sirc_paf_200fd7f.pdf

Elle a aussi été étudiée par Cécile Ouvrier-Buffet, toujours dans le cadre de "Maths à modeler" :

<http://ccob.pagesperso-orange.fr/Articles/C0PI2006.pdf>