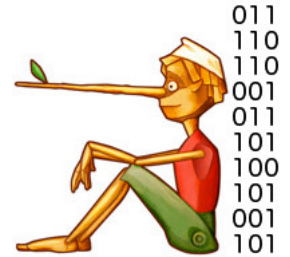




Qui est-ce ?



Une introduction aux codes correcteurs d'erreurs

Sur une feuille sont dessinés des personnages, qui se distinguent selon 4 éléments, qu'ils possèdent ou non : des lunettes, une moustache, un chapeau, des cheveux. Tous les personnages sont différents (par exemple, il ne peut pas y en avoir deux avec des lunettes, pas de moustache ni de chapeau et des cheveux). Un joueur choisit secrètement un des personnages. L'autre joueur doit deviner duquel il s'agit en posant des questions, auxquelles l'autre ne peut répondre que par « oui » ou « non », du type « a-t-il des cheveux ? ». Tous les personnages possibles sont dessinés dans le jeu.

1. Combien de personnages y a-t-il ?

$2^4 = 16$. Les puissances ne sont vues qu'en quatrième, au niveau jaune on dira $2 \times 2 \times 2 \times 2$.

2. Combien faut-il poser de questions pour être sûr de pouvoir trouver ?

On pose autant de questions qu'il y a de critères, soit 4 questions.

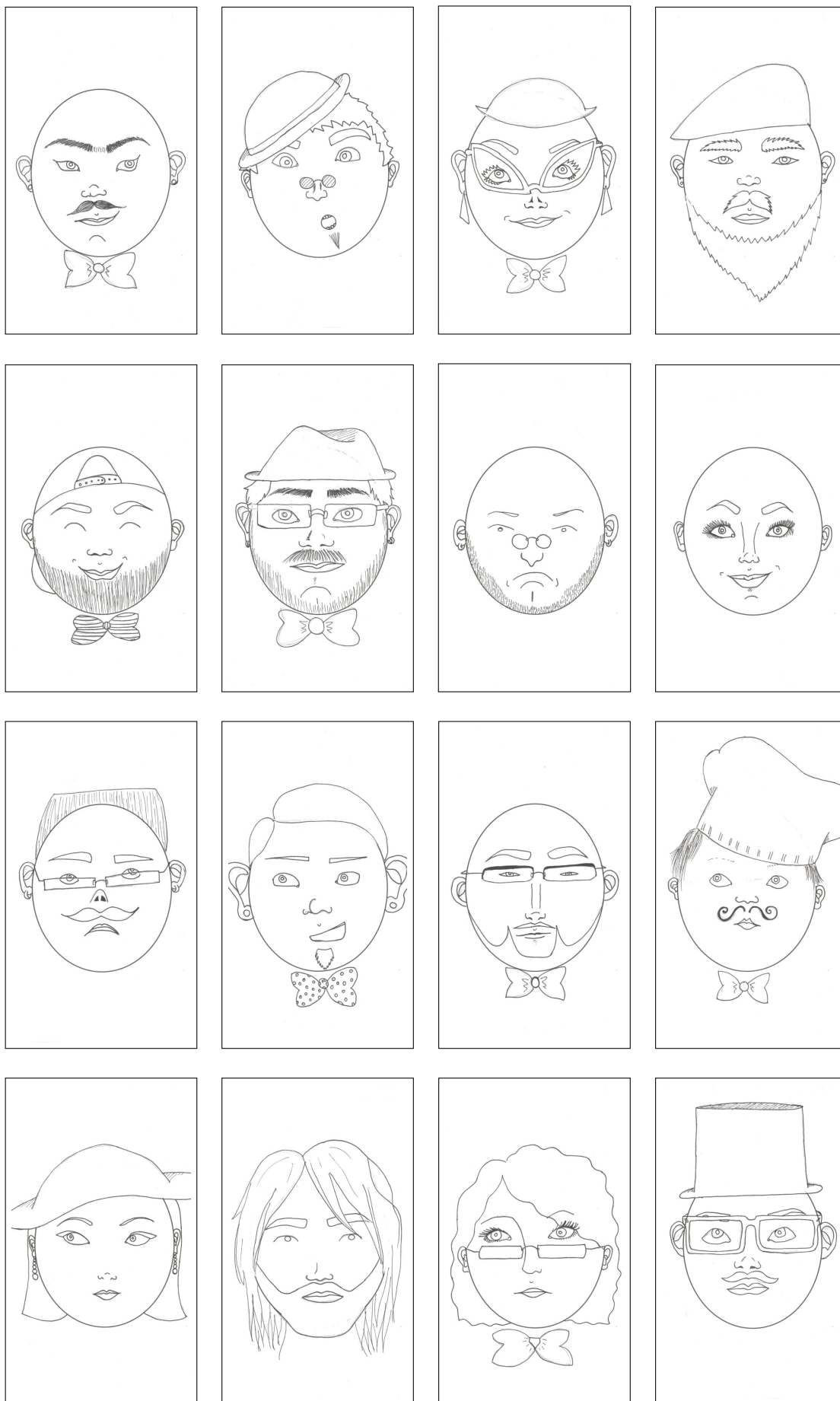
3. On rajoute maintenant des éléments sur certains de ces personnages : boucle d'oreille, barbe, nœud papillon. Combien de questions faut-il poser pour être sûr de pouvoir trouver ?

Cela ne change rien... toujours les 4 mêmes questions !

On joue à ce jeu avec les éléments supplémentaires et en rajoutant la règle suivante : le joueur qui a choisi le personnage secret a le droit de mentir au plus une fois en répondant aux questions. Ces questions sont, dans l'ordre :

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------------|-------------------------|
| (1) A-t-il des lunettes ? | (2) A-t-il une moustache ? | (3) A-t-il un chapeau ? |
| (4) A-t-il des cheveux ? | (5) A-t-il des boucles d'oreille ? | (6) A-t-il une barbe ? |
| (7) A-t-il un nœud papillon ? | | |

On peut lancer une partie sur l'ordinateur ([jeu.html](#), à ouvrir de préférence avec Firefox, éventuellement Chrome, éviter Internet explorer et Safari). Il y a aussi un jeu de cartes (plus grandes) qu'on peut utiliser si les dessins sur l'écran sont trop petits ou pour jouer sans ordinateur.



On représente un personnage par un élément de $\mathbf{F}_2^7 : (x_1, \dots, x_7)$ avec $x_i = 1$ si la réponse à la

question i est « oui », 0 sinon. Les personnages représentés dans le jeu sont les 16 éléments du $\mathbf{F}_2$ -espace vectoriel engendré par $(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ et $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$.

4. Quel est le nombre minimal de différences entre deux personnages distincts du jeu ?

Il y en a 3. On ne va pas demander de vérifier tous les couples de personnages mais l'admettre. Ce qui est important c'est plutôt de comprendre la question suivante.

5. Pourquoi cela permet-il de deviner le personnage secret, même si le joueur a menti une fois ?

Quand on ment à une question, on décrit un personnage (fictif) qui a une seule différence avec le personnage qu'on avait choisi. Et ce personnage fictif a au moins 2 différences avec les 15 autres personnages du jeu. Remarque : si deux personnages du jeu ne présentaient que 2 différences, on pourrait en mentant une fois décrire un personnage qui n'aurait qu'une différence avec ces deux personnages, et on n'aurait aucun moyen de savoir quel était le bon.

Le niveau jaune s'arrête là mais si l'enfant a envie de continuer, on peut lui proposer la méthode de codage d'un personnage avec des 0 et des 1 présentée dans le niveau orange. On peut également expliquer que les données informatiques sont formées de 0 et de 1 et que lors d'une communication il peut y avoir des erreurs (comme quand on joue au téléphone arabe) qu'on aimerait pouvoir corriger, tout comme on a su trouver un mensonge dans notre jeu.

Voyons maintenant comment jouer à ce jeu avec mensonge, sans l'aide de l'ordinateur !

On représente chaque personnage par une suite de sept chiffres, 0 ou 1. Le troisième personnage, celui qui a des lunettes, pas de moustache, un chapeau, des cheveux, pas de boucle d'oreille, une barbe, pas de nœud papillon, sera ainsi représenté par 1011010. On code les réponses du joueur aux questions de la même façon, par exemple si j'ai choisi le personnage numéro 3 et que je mens à la question « a-t-il des boucles d'oreille ? », ma réponse sera 1011110.

Remarque : Le code correspondant à une carte est inscrit au dos de la carte.

On reçoit une réponse. Pour savoir si elle est correcte ou mensongère, on va calculer trois nombres, les « syndromes » qui valent chacun 0 ou 1.

s_1 : on garde un chiffre sur deux $\square \times \square \times \square \times \square$ on en fait la somme. s_1 vaut 0 si la somme est paire, 1 si elle est impaire.

s_2 : $\times \square \square \times \square \square \times$, on fait la somme, s_2 vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.

s_3 : $\times \times \times \square \square \square \square$ (que les quatre derniers chiffres), on fait la somme, s_3 vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.

Exemple : Si la réponse obtenue est 0011110, on a

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 1.$$

Notons H la matrice suivante, à coefficients dans $\mathbf{F}_2$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si la réponse obtenue est $x = (x_1, \dots, x_7)$, les syndromes associés sont donnés par le produit matriciel Hx .

6. Le joueur répond sans mensonge. Calculer, pour chaque personnage, s_1, s_2 et s_3 .

Répartir la tâche dans le groupe, chacun en calcule 1 ou 2! Dans tous les cas, on trouve $s_1 = s_2 = s_3 = 0$.

En effet, le sous-espace vectoriel des (codes des) personnages du jeu est exactement le noyau de H (on a construit H pour cela).

7. Que valent s_1, s_2 et s_3 si on ment à la première question et pas aux autres ?

Il va être important de réussir à faire comprendre que la réponse à cette question ne dépend pas du personnage choisi.

Pour le calcul de s_1 , on regarde $\square \times \square \times \square \times \square$. On a vu que si on ne mentait pas, s_1 valait 0. Si on ment à la première question, on change la valeur du premier bit (0 si c'était 1, 1 si c'était 0) et pas des autres, et s_1 vaut donc 1.

Pour le calcul de s_2 , $\times \square \square \times \square \square \times$. Si on ne ment pas, s_2 vaut 0. Si on ment à la première question, on change la valeur du premier bit (0 si c'était 1, 1 si c'était 0) et pas des autres, ce qui ne change pas s_2 qui vaut toujours 0.

Pour s_3 , comme pour s_2 , une modification du premier bit ne change rien, on a toujours $s_3 = 0$.

Explication en termes d'algèbre linéaire (sauf avec un expert, on évite bien entendu de parler de cette explication) : si le personnage choisi est $m \in \mathbf{F}_2^7$ et qu'on ment à la question i , le personnage fictif décrit est $m + e_i$ où e_i désigne le i -ième vecteur de la base canonique. Le syndrome obtenu est donc $H(m + e_i) = Hm + He_i = He_i$ qui est égal à la i -ième colonne de H . En particulier, si on ment à la première question, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$.

8. Et si on ment seulement à la cinquième question ?

Dans ce cas, (s_1, s_2, s_3) est égal à la cinquième colonne de H . On peut donner une explication du même type qu'à la question précédente, pour trouver $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ et $s_3 = 1$.

9. Comment le tableau ci-dessous permet-il de découvrir facilement à quelle question le joueur a menti ?

On calcule les syndromes. S'ils ne valent pas tous 0, on regarde le numéro de la colonne correspondant, il donne le numéro de la question à laquelle on a menti. Si les syndromes sont tous les trois nuls, le joueur n'a pas menti. On a construit une sorte de détecteur de mensonge !

	1	2	3	4	5	6	7
s_1	1	0	1	0	1	0	1
s_2	0	1	1	0	1	1	0
s_3	0	0	0	1	1	1	1

Le principe sur lequel repose ce jeu est en fait à la base d'applications très utiles, pour transmettre ou stocker des données. Disons que les données transmises sont des paquets de 0 et de 1. Lors de la transmission, que ce soit par ondes radio, par câble ou autre, des erreurs sont susceptibles de se produire et le message reçu n'est plus parfaitement conforme à celui qui a été envoyé (les erreurs jouent le rôle des mensonges de notre jeu). En envoyant, en plus de l'information de départ, une information supplémentaire

redondante, on va être capable de dire s'il y a eu ou non des erreurs lors de la transmission et de les corriger s'il n'y en a pas eu trop. C'est exactement le même principe que quand des pilotes d'avion disent « Alpha, Charlie, Tango » pour dire « A, C, T » mais avec plus d'algèbre !

Voici quelques informations supplémentaires sur ce qu'est un code correcteur. L'espace vectoriel $\mathbf{F}_2^n$ est muni de la distance suivante (dite de Hamming) : la distance entre deux vecteurs est égale au nombre de composantes qui diffèrent entre ces deux vecteurs. Un code correcteur est un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ de $\mathbf{F}_2^n$ (ici $n = 7$ et le sev est de dimension 4) et on définit sa distance minimale d comme la plus petite distance entre deux vecteurs distincts de $\mathcal{C}$. Les éléments du code $\mathcal{C}$ sont les messages que l'on peut envoyer (via un canal). Si t erreurs se produisent lors de la transmission, c'est-à-dire si t bits sont modifiés, le mot reçu est à distance t du mot qui a été envoyé. Si la distance minimale vérifie $d \geq 2t + 1$, les boules de centre les mots de $\mathcal{C}$ et de rayon t ne s'intersectent pas donc le mot reçu est dans une seule de ces boules et on peut déterminer quel mot a été envoyé. Dans notre exemple $d = 3$ et on peut corriger $\lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor = 1$ erreur.

10. Que va-t-il se passer si le joueur ment deux fois ?

Regardons les syndromes qu'on peut obtenir, c'est-à-dire toutes les colonnes du tableau. Il y en a 7, soit tous les vecteurs non nul de $(\mathbf{F}_2)^3$. Par conséquent, quelle que soit la réponse que le joueur donne (avec autant de mensonges qu'il veut), si on croit qu'il a joué le jeu et menti au plus une fois, en faisant les calculs on tombe sur un syndrome qui est bien dans le tableau et on corrige en croyant qu'il n'y a eu qu'un mensonge. On ne pourra pas détecter s'il y a eu trop d'erreurs et on donnera un personnage qui ne pourra pas être le bon !

11. Voyez-vous comment, en ajoutant une caractéristique sur certains des 16 personnages (un piercing dans le nez, par exemple) et une question correspondante, on pourrait détecter si le joueur a triché et menti deux fois ?

On peut introduire ce que l'on appelle un « bit de parité » : chaque personnage était codé par une suite de sept bits, on en rajoute un huitième qui est égal à 0 si le nombre de 1 dans le code du personnage était pair, 1 si le nombre de 1 était impair (ainsi, la somme des 8 bits d'un personnage est toujours paire). Dans le jeu, on met un piercing si ce bit vaut 1, pas de piercing si c'est 0.

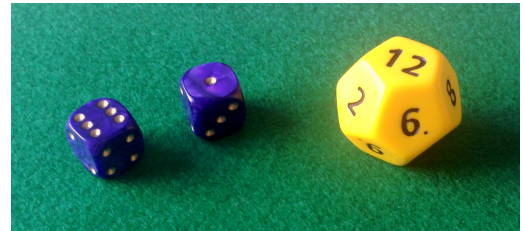
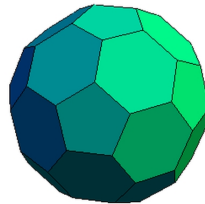
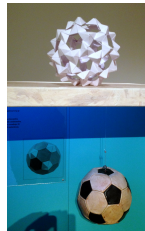
La somme des 8 bits de la réponse vaut alors 0 si et seulement si le nombre de mensonges est pair.

On fait comme précédemment, on calcule le syndrome à l'aide des 7 premiers bits. S'il n'est pas nul, on fait la somme des bits : si elle vaut 1, il y a eu un nombre impair de mensonges (si c'est bien un seul, on sait corriger), si elle vaut 0 on sait qu'il y a eu au moins deux mensonges (qu'on n'est par contre pas en mesure de corriger).



Probabilités et football

Franka Miriam Brückler
Paris, 2015.



À la découverte des probabilités

Au niveau jaune, on utilisera le vocabulaire des chances et non celui des probabilités, qui pourra être employé en gros à partir de la classe de Troisième (fin de). Dans les premières questions, on cherche des réponses intuitives, qui seront confrontées aux fréquences obtenues par la suite. Mais il est vrai qu'il est difficile d'intuiter par exemple la chance d'obtenir un total inférieur à 5 avec deux dés. Il sera bien de laisser les participants chercher un peu afin qu'ils arrivent à l'idée qu'il suffit de dessiner tous les cas, puis, pour gagner du temps, de leur sortir le tableau donnant tous les cas possibles pour faire le calcul. Pour les "petits", on leur donnera de suite le tableau, et on leur fera compter le nombre de cas possibles, et entourer les "cas favorables". On a représenté l'univers avec les 36 cas pour deux dés de couleurs différentes, afin d'éviter les questions dans le cas de deux dés de même couleur où il pourrait être tentant de regarder les paires et non les couples de résultat, car c'est plus compliqué.

☐ On joue avec deux dés à 6 faces. Essayez de trouver intuitivement quelle est la chance :

- d'obtenir un ☐ avec un dé à 6 faces ? 1 chance sur 6
- de ne pas obtenir un ☐ avec un dé à 6 faces ? 5 chances sur 6
- d'obtenir ☐☐ en lançant deux dés à 6 faces ? 1 chance sur 36
- d'obtenir un total de 5 en lançant deux dés à 6 faces ? 4 chances sur 36
- d'obtenir un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ? 10 chances sur 36

☐ On joue maintenant avec un dé à 12 faces. Intuitivement quelle est la chance d'obtenir un 2 ? 1 chance sur 12

☐ Si on lance un certain nombre de fois les deux dés à 6 faces, en notant la somme des 2 dés, puis qu'on lance le même nombre de fois le dé à 12 faces, pensez-vous que les différents résultats possibles apparaissent à peu près le même nombre de fois ? Non, par exemple impossible d'obtenir 1 en lançant deux dés à 6 faces...

☐ Vous allez maintenant lancer ces trois dés. Les enfants ne connaissent pas en général la notion de quotient encore moins celle de rapport ; on pourra utiliser ces mots, mais seulement après les avoir expliqués, d'où la rédaction des questions au niveau jaune. Pour gagner du temps, on peut mettre les scolaires par groupes de 4, un qui lance le dé à 12 faces, deux pour les dés à 6 faces et un qui note et remplit le tableau. On aura un tableau en partie rempli pour gagner du temps car 30 lancers, cela risque d'être long. Cette question est typiquement dans l'esprit du programme de Troisième. ...

☐ Utilisez le tableau des fréquences (tableau 3) pour répondre aux questions suivantes, et comparez vos réponses avec celles données intuitivement au début...

Les fréquences des différents résultats sur la somme de deux dés à 6 faces et sur le dé à 12 faces sont-elles les mêmes ? Non, impossible d'obtenir 1 avec deux dés !

☐ Vous pouvez expliquer que cette activité montre que les fréquences, en particulier quand elles sont calculées à partir d'un grand nombre de lancers, peuvent être utilisées comme des approximations des chances / probabilités théoriques.

Vous pouvez montrer les différents dés à 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 et 20 faces. On fournit un tableau des valeurs approchées de $1/n$ pour gagner du temps pour remplir le tableau 4.

☼☼☼ Conclusion ☼☼☼

Pour conclure, vous pourrez faire le bilan de ce qui a été vu dans cette partie.

Plus vous réalisez de lancers, plus la fréquence d'un événement sera proche de la chance (resp. probabilité) théorique.

Si la chance qu'un événement arrive (resp. la probabilité d'un événement) est p , la chance qu'il n'arrive pas (resp. la probabilité de l'événement contraire) est $1 - p$.

Si des événements ne peuvent arriver en même temps, la chance (resp. la probabilité) qu'au moins un des deux arrive est la somme des chances que chacun d'eux arrive (resp. des probabilités de chacun d'eux).

Si deux événements sont indépendants (c'est-à-dire le fait que l'un arrive n'influence pas l'autre et vice-versa), la chance (resp. la probabilité) que les deux arrivent est le produit des chances (resp. des probabilités) de chacun d'eux.



Le paradoxe des anniversaires

Parfois, on peut avoir une bonne intuition à propos des chances qu'un événement se produise. Mais attention, il existe plein de résultats qui ne sont pas du tout intuitifs ! L'un d'entre eux concerne le "paradoxe des anniversaires".

Pour les scolaires, afin de gagner du temps, on choisira la date d'anniversaire de l'un des élèves et c'est celle-là que l'on cherchera dans les tables.

☐ À votre avis, sans aucun calcul, combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que la vôtre ?

S'il y a 30 personnes, pensez-vous qu'il est probable que quelqu'un partage votre date d'anniversaire ?

☐ À votre avis, toujours sans calculs, combien de personnes doivent être réunies pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?

Si 30 personnes sont réunies, pensez-vous qu'il soit probable qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?

En fait, à partir de 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux que ce soit le cas, mais cela n'a rien d'intuitif, on ne demande ici aucun calcul, juste ce que les gens en pensent. Voir plus loin.

☐ Expliquez alors que nous avons vu que la chance qu'un événement se produise (resp. la probabilité d'un événement) diffère peu de la fréquence quand on procède à un nombre assez grand d'essais. Ainsi, pour les questions ci-dessus, on pourrait faire des essais en prenant au hasard des groupes de personnes d'une taille donnée, par exemple 30 personnes, et en vérifiant si, parmi elles, se trouve quelqu'un qui a la même date d'anniversaire que le participant, ou s'il y en a deux qui partagent la même date d'anniversaire. Si on ne s'est pas trompé dans les réponses aux questions précédentes, et si on examine un nombre suffisamment grand de groupes de 30 personnes, dans plus (ou moins suivant la réponse du participant) de la moitié des groupes, il devrait y avoir une ou deux personnes partageant sa date d'anniversaire.

Vous avez à votre disposition les tables des dates de naissance des joueurs de la coupe du monde de football 2014. Dans chaque équipe, il y a 30 joueurs.

☐ Reprenez les tables des dates de naissance des joueurs.

- Dans combien d'équipes y a-t-il au moins 2 joueurs ayant la même date d'anniversaire ?
*Argentine, Australie, Bosnie-Herzégovine, Brésil, Cameroun, Colombie, Costa Rica, Croatie, Équateur, Angleterre, France, Ghana, Grèce, Honduras, Iran, Japon, Corée, Mexique, Pays-Bas, Nigéria, Russie, Espagne, Suisse, USA, soit 24 équipes sur 32 équipes, d'où une proportion de 75%.
Voir un peu plus bas le calcul théorique qui donne 71% si on suppose les dates d'anniversaire uniformément réparties dans l'année, ce qui n'est pas tout à fait exact, de sorte que la probabilité que deux personnes soient nées le même jour dans un groupe de n personnes est encore plus forte que le calcul théorique. Le 75% est donc parfaitement cohérent.*

- Pouvez-vous en déduire une estimation de la chance qu'au moins deux personnes partagent la même date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?

Ces estimations sont-elles proches de vos prévisions ?

🎯🎯🎯 Conclusions 🎯🎯🎯

Pour conclure sur cette partie, expliquez qu'il faut faire très attention quand on calcule des chances (resp. probabilités). Ce n'est pas la même chose de demander si quelqu'un fête son anniversaire le même jour que vous, ou de se demander si deux personnes dans un groupe fêtent leur anniversaire un même jour quelconque. Il faut au moins 253 personnes pour qu'il y ait au moins une chance sur deux que quelqu'un fête son anniversaire le même jour que vous, alors qu'il faut seulement un groupe de 23 personnes pour qu'il y ait au moins une chance sur deux pour que deux personnes de ce groupe aient une date d'anniversaire commune.

En effet, supposons que n personnes sont dans une même salle. On ne considérera pas les années bissextiles.

L'univers Ω est formé de tous les n -uplets de jours d'anniversaire. On a donc $\Omega = \{1, \dots, 365\}^n$ et $\text{Card}(\Omega) = 365^n$. On suppose que les dates d'anniversaire sont distribuées "au hasard" sur l'année (ce qui n'est pas réaliste en fait), de sorte que l'on munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Ainsi, si $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement, $\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

On considère l'événement E "il existe une personne ayant la même date d'anniversaire que moi". L'événement contraire $\bar{E}$ est "aucune des n personnes n'a la même date d'anniversaire que moi", ce qui signifie qu'elles sont toutes nées l'un des 364 jours qui ne correspondent pas à ma date d'anniversaire.

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

Il s'ensuit

$$\mathbb{P}(E) > \frac{1}{2} \iff n > \frac{\ln 2}{\ln(\frac{365}{364})} \iff n \geq 253.$$

On considère cette fois l'événement E "les personnes ont toutes leur anniversaire un jour différent". L'événement E est formé de tous les échantillons de taille n sans répétition, donc

$$\text{Card}(E) = A_{365}^n = 365.364.363. \dots (365 - n + 1),$$

et

$$\mathbb{P}(E) = \frac{A_{365}^n}{(365)^n}.$$

La probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est la probabilité de l'événement contraire, et est donc égale à $1 - \frac{A_{365}^n}{(365)^n}$. Si $n = 23$, cette probabilité vaut environ 0,507... Elle est d'environ 0,97 s'il y a 50 personnes, d'environ 0,999 s'il y en a 100, et égale à 1 si $n \geq 366$! Pour $n=30$, le cas des équipes de football lors de la coupe du monde 2014, cette probabilité vaut environ 0,706 (à comparer avec la fréquence trouvée égale à 75%).



Tirs au but : une introduction à la modélisation mathématique

Le tableau suivant indique le nombre de tirs au but durant les trois dernières années de la Ligue 1 (en France) et des trois dernières finales de Coupe du monde, et le calcul des fréquences correspondantes !

	Ligue 1 14/15	Ligue 1 13/14	Ligue 1 12/13	WC2014	WC2010	WC2006
Tirs au but tentés	126	79	71	36	32	26
Tirs au but réussis	103	66	64	26	23	38
Fréquence (en %)	81,75%	83,54%	90,14%	72,22%	71,88%	68,42%

En fait, dans la plupart des ligues et championnats de football, environ 70 % à 80 % de tirs au but se transforment en buts.

Vous pouvez expliquer qu'en fait, ces chiffres peuvent aussi être retrouvés à l'aide d'arguments géométriques et physiques, mais ça n'est pas notre sujet de préoccupation ici. Il est communément admis qu'un tir au but est une sorte de loterie, aussi bien pour le tireur que pour le gardien. Par une modélisation probabiliste simple, en supposant que cet effet de loterie est vrai, on peut vérifier que les pourcentages annoncés sont raisonnables. C'est ce que l'on va faire, en commençant par un modèle trop simple, on demandera au participant pourquoi plus tard.

☐ La cage est divisée en 4 zones.

- Quelle est la probabilité que le gardien devine où il doit se placer pour arrêter le tir ?
1/4
- Quelle est la probabilité de marquer un but dans ce scénario simple ? 3/4
- Les hypothèses de ce scénario sont-elles réalistes ? Que manque-t-il ? À ce stade, on cherche juste à faire dire que 4 zones, ce n'est pas assez.

☐ D'après vous, du point de vue du gardien, en combien de zones est-il raisonnable de considérer que la cage est divisée ? Le symbole ☉ va représenter ce nombre.

Devant vous se trouvent des perles en plastique de deux couleurs. Prenez ☉-1 perles de couleur 1 et 1 perle de couleur 2 et mettez-les dans la première boîte. La perle de couleur 2 représente le gardien arrêtant le but.

Si vous fermez les yeux et que vous choisissez une perle dans la boîte, quelle est la probabilité de tirer une perle de couleur 1 ? (i.e. que le but soit marqué) ?

☐ Zlatan Ibrahimović a loupé la cage en 2013 et David Trézéguet en finale de la coupe du monde 2006, laissant la coupe à l'Italie ?

Évidemment, chez les professionnels, il est peu probable qu'un joueur manque la cage. Choisissez un pourcentage dans le tableau ci-dessous et prenez le nombre de perles correspondant. Mettez-les dans la deuxième boîte. Les perles de couleur 2 représentent les loupés.

☒ Maintenant, fermez les yeux et tirez une perle dans chacune des deux boîtes. Si aucune d'elles n'est de **couleur 2**, cela correspond dans notre modèle à un but marqué. Notez le résultat du tirage, remettez les perles dans leurs boîtes de départ et recommencez l'expérience 30 fois.

- Quel est le nombre de "buts marqués" sur ces 30 essais ?
- Quelle est la fréquence des tirs au but transformés dans notre modèle ? Comparez ce nombre aux pourcentages annoncés au début !

☒ Si la probabilité que le gardien fasse le mauvais choix est p et que la probabilité que le tireur ne manque pas la cage est q , quelle est la probabilité que le but soit marqué ? Vous pouvez utiliser la fréquence obtenue à la question ☒ ci-dessus pour trouver la réponse à cette question. *Il faudrait trouver le produit pq .*



Cotes et coefficients de paris

☐ Imaginez que vous pariez sur le résultat d'un lancer de pièce avec quelqu'un, vous pariez sur "face" et votre adversaire parie sur "pile".

- Quelle est la probabilité que vous remportiez le pari ? Et votre adversaire ? *La pièce n'étant pas truquée - on laisse le participant se poser la question - chaque joueur a une probabilité égale à 1/2 de gagner.*
- Combien y a-t-il de résultats possibles à ce pari ? *2, pile ou face*

On dit que votre *cote* dans ce jeu est donnée par le rapport

$$\frac{\text{nombre de résultats possibles en votre faveur}}{\text{nombre de résultats possibles en votre défaveur}} :$$

- Quelle est votre cote dans ce jeu ? *1 résultat en notre faveur, 1 résultat en notre défaveur, la cote vaut donc 1 ; d'où l'expression "cote 1 contre 1"*
- Si vous pariez une somme $\ominus$ sur un lancer de pièce, et que le gagnant remporte les 2 mises, quelle somme votre adversaire doit parier pour que le jeu soit équitable ? Exactement $\ominus$, plus que $\ominus$ ou moins que $\ominus$? *Par symétrie du jeu, l'adversaire doit miser exactement $\ominus$.*
- Dans le cas où $\ominus=1$, quelle somme récupérez-vous si vous gagnez le pari (en comptant votre mise et celle de l'adversaire) ? Et si vous misez une somme $\ominus$ quelconque ? *On récupère la mise $\ominus=1$ et celle de l'adversaire $\ominus=1$, donc 2, mais attention, on n'a gagné que 1. Si on mise $\ominus$, on récupère 2 $\ominus$ quand on gagne.*

On appelle *coefficient* de votre pari le nombre c tel que vous récupérez c fois votre mise lorsque vous gagnez.

- Quel est le lien entre la probabilité que vous remportiez le pari et votre coefficient de pari ? *Il semble que le coefficient soit égal à l'inverse de la probabilité de remporter le pari, mais cela pourrait être une autre formule. Regardons ce qui se passe si la pièce est truquée et que l'on a une probabilité p de gagner, $1 - p$ de perdre. Si on mise $\ominus$, par définition du coefficient de pari, on récupère $c \ominus$ quand on gagne, de sorte que l'espérance de gain est $-\ominus + c \ominus p$ (n'oublions pas que l'on a misé $\ominus$). Or le jeu est équitable, donc cette quantité est nulle, d'où $c=1/p$.*

On admet que cette relation reste vraie si la probabilité que vous gagniez est p et non plus $1/2$. Dans la suite, on va vérifier cette relation à partir des fréquences.

☐ On impose à tout le monde la même probabilité, 25%, de gagner son pari, pour des raisons de simplicité.

- Quelle est la cote correspondante ? *1 cas en notre faveur et 3 cas en notre défaveur, donc cote de 1:3 ou 1 contre 3*
- Quel est le coefficient (pour un jeu équitable) correspondant ? On le notera $\oplus$. Ici $p = 1/4$ d'où $\oplus=1/p=4$.

☐ Les sites de paris proposent en principe des coefficients plus bas que si le jeu était équitable, de façon à gagner de l'argent. Nous allons utiliser un dé à 12 faces pour tester ce qu'on gagne ou perd si on prend un coefficient égal à 3 et si on prend un coefficient égal à 0,4.

Sur les 12 résultats possibles du dé, les résultats de 1 à 3 vont représenter des matchs se finissant sur un nul.

- Lancez le dé à 12 faces 30 fois et notez les résultats obtenus dans le tableau 6.
- Combien de "matchs nuls" avez-vous obtenus ?
- Si vous aviez parié la somme 1 sur chaque match, combien auriez-vous gagné ou perdu avec le coefficient de pari 3 ? Et avec le coefficient 0,4 ?

Le passage de 4 à 3,6 peut paraître faible, mais normalement, on doit constater que les gains sont nettement moindres !



Tableau 4

Equipe	Buts	Tirs	Fréquence	Meilleur dé
Paris SG (M,L)	83	491	16,90%	6 faces
Olympique Lyon	72	524	13,74%	8 faces
Olympique Marseille	76	579	13,13%	8 faces
FC Evian T. G.	41	334	12,28%	8 faces
SM Caen (N)	54	462	11,69%	8 faces
HSC Montpellier	46	396	11,62%	8 faces
SC Bastia	37	320	11,56%	8 faces
AS Saint-Etienne	51	443	11,51%	8 faces
EA Guingamp (P)	41	359	11,42%	10 faces
AS Monaco	51	452	11,28%	10 faces
Stade Reims	47	441	10,66%	10 faces
OGC Nizza	44	418	10,53%	10 faces
FC Toulouse	43	431	9,98%	10 faces
Girondins Bordeaux	47	488	9,63%	10 faces
Stade Rennes	35	365	9,59%	10 faces
OSC Lille	43	463	9,29%	10 faces
FC Lorient	44	486	9,05%	12 faces
RC Lens (N)	32	411	7,79%	14 faces
FC Metz (N)	31	450	6,89%	16 faces
FC Nantes	29	424	6,84%	16 faces

Données issues de <http://www.squawka.com/football-team-rankings>



Rubik's cube

Question 0. Travailler sur le Rubik's $2 \times 2 \times 2$ revient à travailler sur les coins du Rubik's $3 \times 3 \times 3$.

Question 1. Pour le Rubik's $2 \times 2 \times 2$, un "mouvement simple" revient à tourner une des faces du cube, il y a donc 6 mouvements simples possibles ($2+2+2$). Pour le Rubik's $3 \times 3 \times 3$, on peut aussi tourner les 3 rangées qui sont "au milieu" du cube, il y a donc $3+3+3=9$ mouvements simples possibles.

Question 2. Les axes de rotation sont les axes x , y et z .

Question 3. La résolution de la face et de la couronne du Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$ est proposée dans l'annexe, ainsi que celle du Rubik's $3 \times 3 \times 3$.

Question 4. On note A , B , C et D les quatre coins du bas du cube, dont les bonnes places sont

D	C
A	B

. On regarde tous les cas possibles.

- Si 2 coins sont à leur place, soit il s'agit de deux coins adjacents, disons A et B , et dans ce cas il suffit d'appliquer une fois le premier algorithme pour intervertir C et D :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline A & B \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline D & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array},$$

soit il s'agit de deux coins opposés, disons A et C , et il faut appliquer trois fois le premier algorithme pour les placer tous dans la bonne position (notez que C est déplacé puis remplacé) :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B & C \\ \hline A & D \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline A & D \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline A & B \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline D & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array}.$$

- Si 1 seul coin est à sa place, disons A , il y a deux configurations possibles pour les 3 autres coins, qu'on peut repositionner à leur place en appliquant deux fois le premier algorithme :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline A & D \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline A & B \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline D & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array},$$

ou

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B & D \\ \hline A & C \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline D & B \\ \hline A & C \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline D & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array}.$$

- Si 3 coins sont à leur place, le 4ème aussi !
- Si aucun coin n'est à sa place, il suffit de tourner la face du bas du Rubik's cube jusqu'à ce qu'au moins un des coins soit à sa place, et on est ramené à un des cas précédents.

Question 5. On regarde à nouveau tous les cas possibles.

- Si exactement un coin est bien orienté, disons A , on applique l'algorithme 2 laissant A invariant, une ou deux fois. Les 3 autres coins seront orientés dans le bon sens

en même temps : ça n'est pas évident, mais c'est dû aux contraintes de la structure du Rubik's cube.

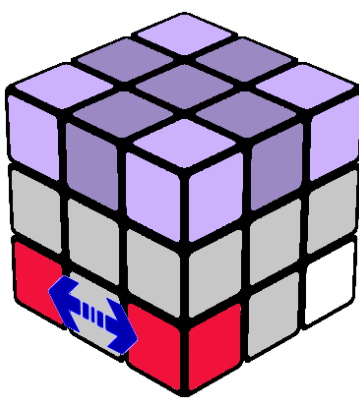
- Si exactement 2 coins sont bien orientés, disons A et B (adjacents ou non), on applique l'algorithme 2 en laissant C invariant, une ou deux fois, de sorte que A et B soient mal orientés et que D soit bien orienté, puis on est ramené au cas précédent puisque seul D est bien orienté.
- Il n'est pas possible qu'exactly 3 coins soient bien orientés, encore une fois à cause des contraintes liées à la structure du Rubik's cube.
- Si aucun coin n'est bien orienté, on applique l'algorithme 2 une ou deux fois en fixant le même coin, jusqu'à ce qu'au moins un coin soit bien orienté et que l'on se retrouve dans l'un des cas précédents.

Question 6. L'annexe décrit une méthode complète pour résoudre le Rubik's 3x3x3.

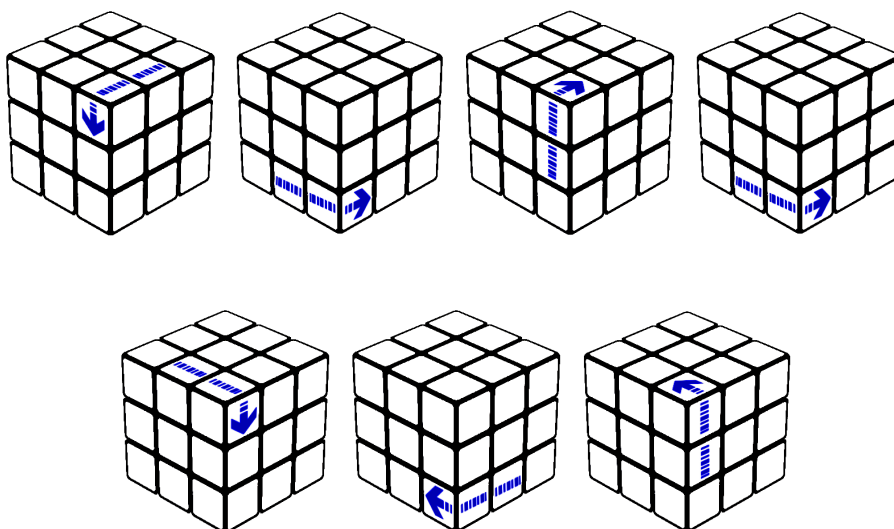


Premier mouvement

Ce premier mouvement échange les deux coins coloriés en rouge, laisse invariant le coin blanc en bas à droite et change l'orientation du dernier coin (caché) de la face du bas. De plus la face d'en haut reste intacte ainsi que la deuxième couronne.

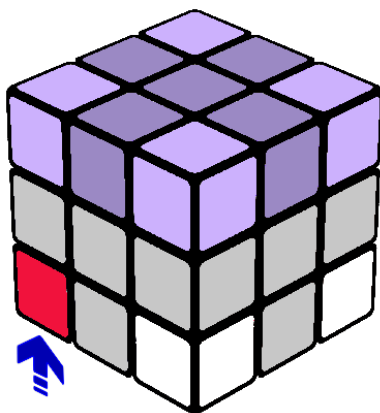


Voici les mouvements à suivre :

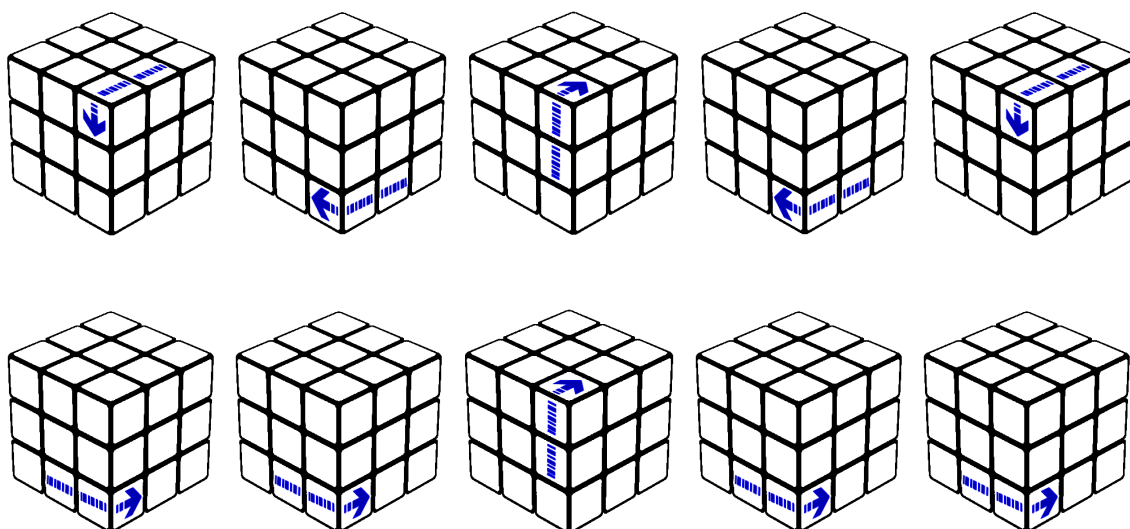


Deuxième mouvement

Ce deuxième mouvement laisse invariant le coin colorié en rouge en bas à gauche, et change l'orientation des trois autres coins de la face du bas. De plus, la face d'en haut et la deuxième couronne ne bougent pas.



Voici les mouvements à suivre :





Annexe

Commencez par choisir votre couleur favorite parmi celles des faces du Rubik's cube. L'objectif de cette fiche est d'apprendre à faire la première couronne du Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$ correspondant à la couleur choisie. Autrement dit, si vous avez choisi la couleur rouge, il s'agit d'apprendre à obtenir la configuration suivante :



Il suffit de placer chaque coin possédant la couleur rouge l'un après l'autre, selon la méthode qui suit. On va traiter ici le cas du coin jaune, rouge et vert. On peut toujours facilement se ramener aux cas suivants en effectuant des rotations de la face du haut ou de la face du bas.

- Le cas de base



L'algorithme suivant permet alors de placer correctement le coin :



- Le cas de base symétrique



L'algorithme suivant permet alors de placer correctement le coin :



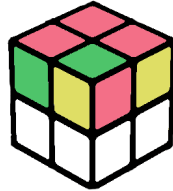
- Deux cas plus embêtants



L'algorithme suivant permet alors de se ramener aux cas 1 ou 2 ci-dessus :



- Et enfin le cas symétrique du deuxième cas embêtant ci-dessus



L'algorithme suivant permet alors à nouveau de se ramener aux cas 1 ou 2 ci-dessus :



Notez que les mouvements décrits ci-dessus ne modifient pas les coins déjà placés !



Annexe (suite)

Voici une explication pour obtenir une face et une couronne du Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$.

Commencez par choisir votre couleur favorite parmi celles des faces du Rubik's cube. L'objectif de cette fiche est d'apprendre à faire la première couronne du Rubik's cube correspondant à la couleur choisie. Autrement dit, si vous avez choisi la couleur rouge, il s'agit d'apprendre à obtenir la configuration suivante :

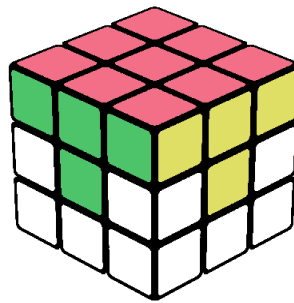
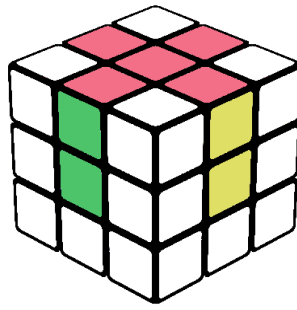


FIGURE 1 – Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$

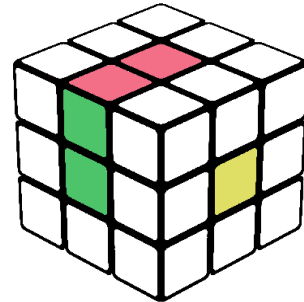
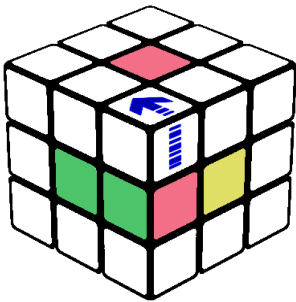
1 La croix

Nous supposons ici que nous avons choisi la couleur rouge. Expliquons alors comment obtenir la croix rouge.

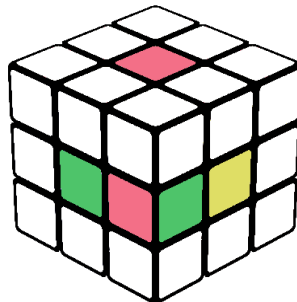
Commencez par repérer un cube qui n'est pas un coin et qui possède la couleur rouge sur l'une de ses deux faces colorées. Par exemple, supposons qu'il s'agisse du cube avec une face rouge et une face verte. Placez ce cube à côté du centre vert. Il y a alors deux cas de figure.



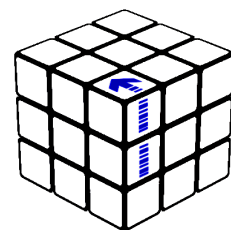
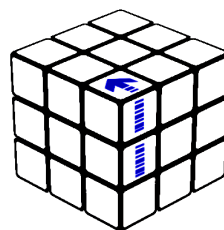
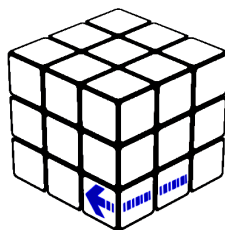
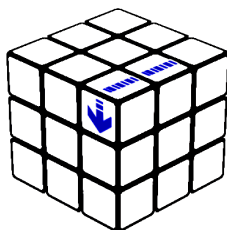
- Les deux couleurs vertes sont adjacentes, auquel cas il suffit de remonter la face de devant.



- Les deux couleurs vertes ne sont pas adjacentes :



Dans ce cas, il suffit d'appliquer l'algorithme suivant dont les trois premiers mouvements permettent de se ramener à la situation précédente.

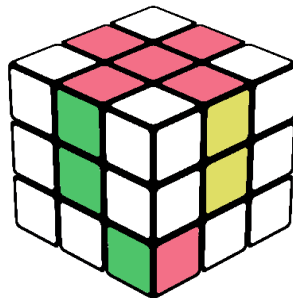


Il suffit alors, pour terminer la croix, d'appliquer le même procédé pour chacune des autres couleurs adjacentes à la couleur rouge. Attention au fait qu'après avoir placé une nouvelle face adjacente, il est possible qu'une face déjà placée ait subi une rotation, auquel cas il faut bien penser à la replacer.

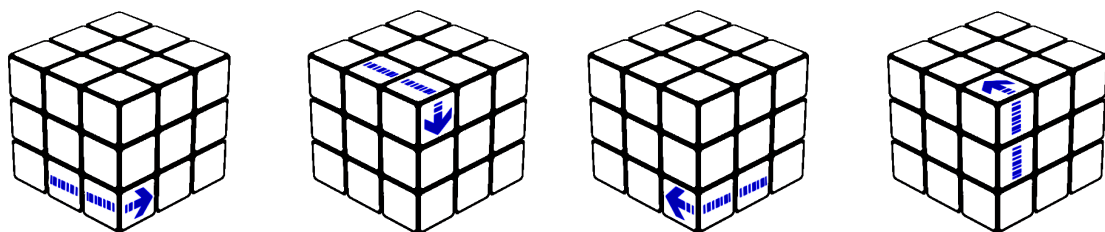
2 Placer les coins

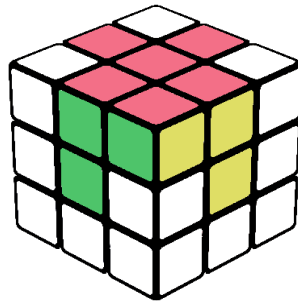
Maintenant que la croix est réalisée, il reste à placer correctement les coins afin de terminer la première couronne. Nous allons traiter ici le cas du coin de couleurs jaune, rouge et vert. On peut toujours facilement se ramener aux cas suivants en effectuant des rotations de la face du haut ou de la face du bas.

- Le cas de base

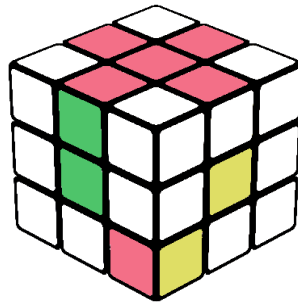


L'algorithme suivant permet alors de placer correctement le coin :

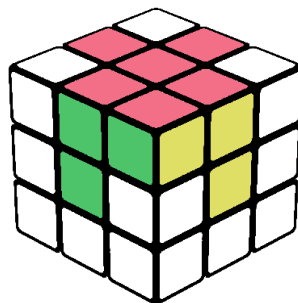
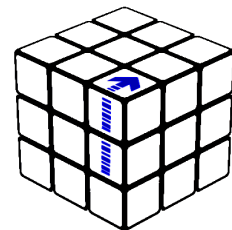
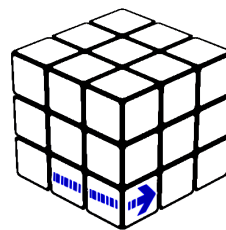
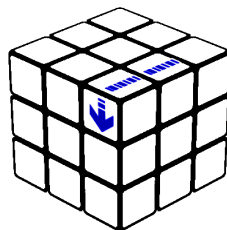
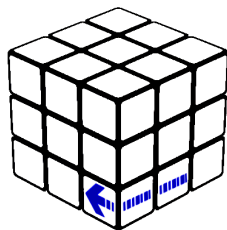




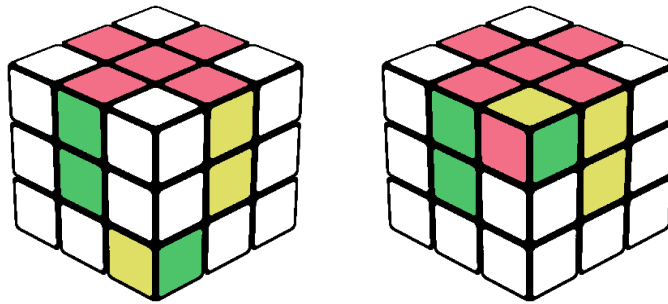
- Le cas de base symétrique



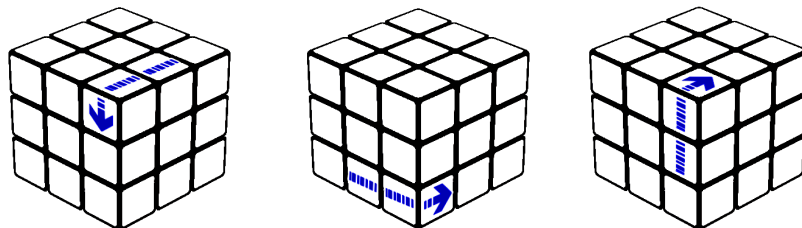
L'algorithme suivant permet alors de placer correctement le coin :



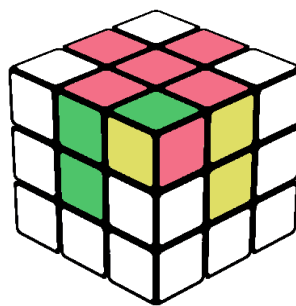
- Deux cas plus embêtants



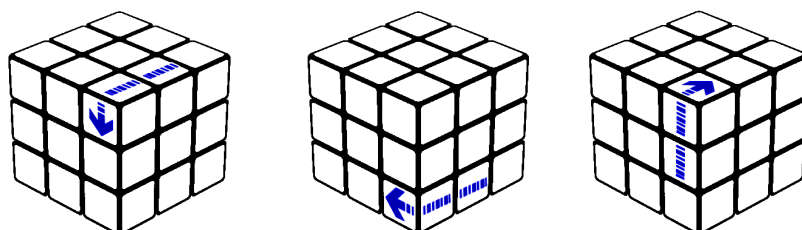
L'algorithme suivant permet alors de se ramener aux cas 1 ou 2 ci-dessus :



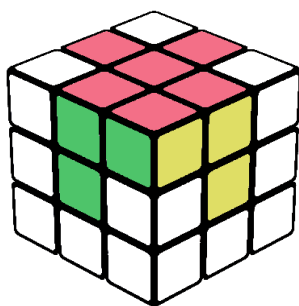
- Et enfin le cas symétrique du cas embêtant ci-dessus



L'algorithme suivant permet alors à nouveau de se ramener aux cas 1 ou 2 ci-dessus :



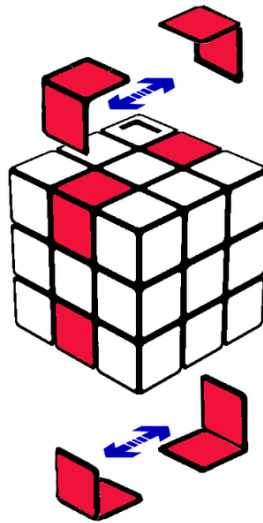
Nous nous trouvons désormais dans la situation suivante et



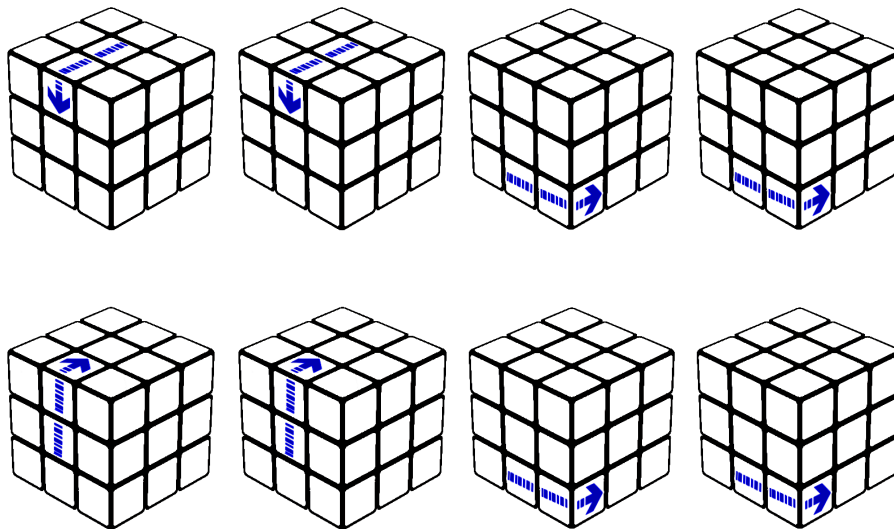
les autres coins se placent de la même manière. Notez que les mouvements décrits ci-dessus ne modifient pas la croix précédemment obtenue ou les coins déjà placés !

A ce stade, on peut utiliser les Premier et Deuxième mouvements pour placer et orienter les coins.

Il reste seulement quelques étapes pour finir le Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$. Nous avons déjà construit une face et sa couronne et, grâce aux deux premiers mouvements, nous avons placé et orienté tous les coins restants du cube. À présent, il ne nous reste plus qu'à placer les milieux des côtés. Pour cela, utilisons un dernier mouvement qui échange les milieux des côtés face à face, en laissant invariant tous les coins.



Voici les mouvements à effectuer

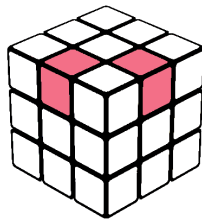


L'idée est donc de placer les deux paires de cubes à échanger face à face. Pour cela, il est conseillé de noter sur une feuille les différents mouvements que vous avez effectués pour vous ramener à cette configuration. Ainsi, les étapes à suivre sont les suivantes.

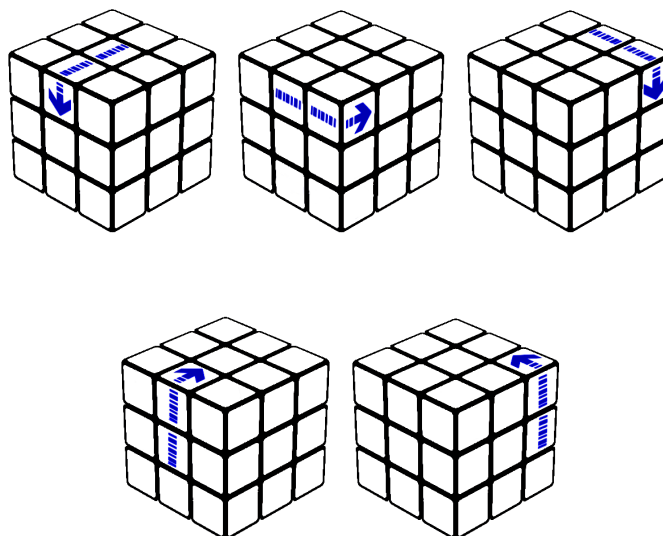
1. Se placer dans la configuration où les cubes à échanger sont face à face. Bien noter qu'il est possible que les coins soient déplacés lors de cette étape. Mais ce n'est pas un problème puisque l'étape 2 ne modifie pas les coins.
2. Effectuer le mouvement qui échange les deux milieux de chaque paire de côtés.
3. Faire les mouvements inverses du point numéro 1 pour se replacer dans la configuration initiale mais avec les milieux échangés.

Plusieurs configurations initiales peuvent avoir lieu. Voici une liste non exhaustive des cas de figure qui peuvent se présenter.

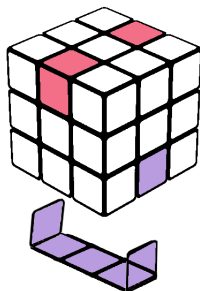
1. Les deux cubes à échanger se trouvent dans la même face côte à côte.



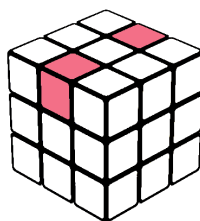
Pour pouvoir les mettre face à face, on effectue les mouvements suivants :



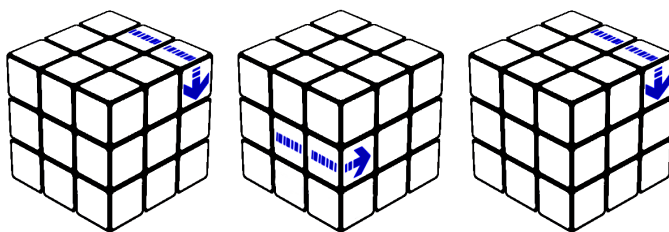
On remarquera que les deux cubes suivants restent invariants.



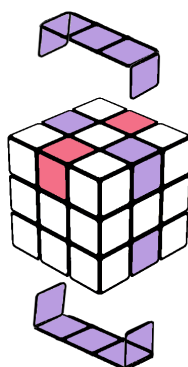
2. Les deux cubes à échanger sont face à face, mais les couleurs à échanger sont croisées. Pour pouvoir effectuer le mouvement qui échange les deux cubes, il faut d'abord changer l'orientation de l'un des deux.



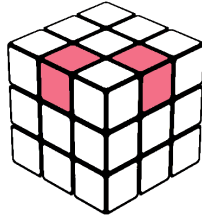
Pour cela, on effectue les mouvements suivants :



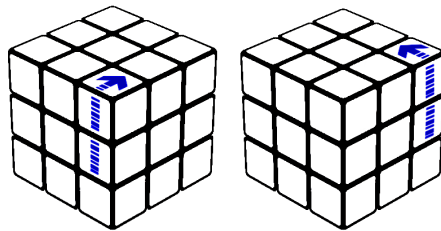
On remarquera que les deux cubes suivants restent invariants.



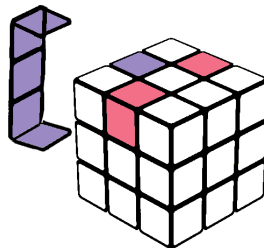
3. Les deux cubes à échanger sont dans la même face, mais les couleurs à échanger sont croisées. Pour pouvoir effectuer le mouvement qui échange les deux cubes, il faut d'abord changer l'orientation de l'un des deux, et mettre les deux cubes face à face.



Pour cela, on effectue les mouvements suivants :



On remarquera que les deux cubes suivants restent invariants.



En effet, il est important de connaître quels sont les cubes qui restent invariants lors de chaque mouvement. On essaiera de placer les milieux déjà bien placés dans les places invariantes pour ne pas défaire le cube en même temps qu'on le construit.