Qui est-ce ?

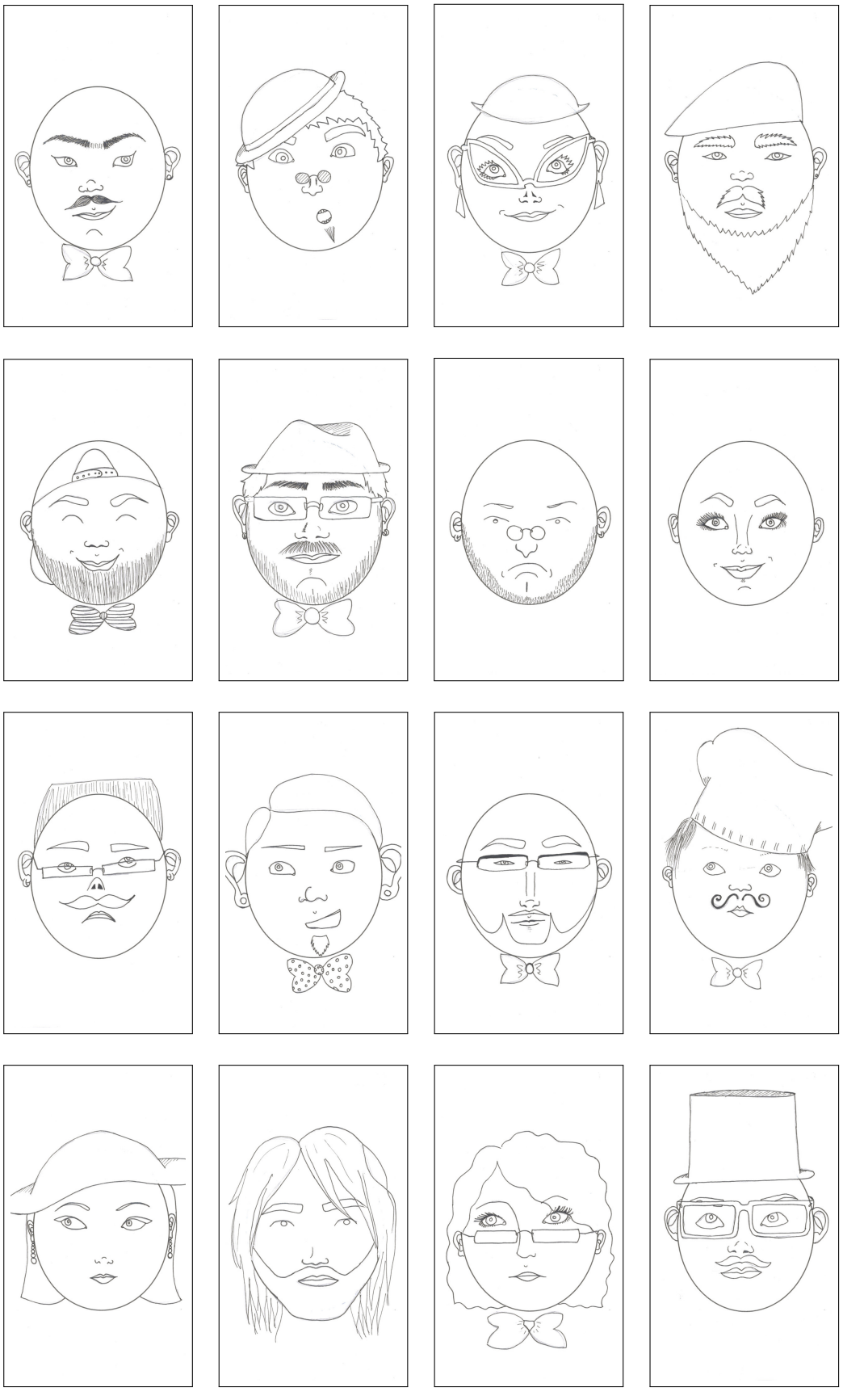


Une introduction aux codes correcteurs d'erreurs

Sur une feuille sont dessinés des personnages, qui se distinguent selon 4 éléments, qu'ils possèdent ou non : des lunettes, une moustache, un chapeau, des cheveux. Tous les personnages sont différents (par exemple, il ne peut pas y en avoir deux avec des lunettes, pas de moustache ni de chapeau et des cheveux). Un joueur choisit secrètement un des personnages. L'autre joueur doit deviner duquel il s'agit en posant des questions, auxquelles l'autre ne peut répondre que par « oui » ou « non », du type « a-t-il des cheveux ? ». Tous les personnages possibles sont dessinés dans le jeu.

1. Combien de personnages y a-t-il ?
2. Combien faut-il poser de questions pour être sûr de pouvoir trouver ?
3. On rajoute maintenant des éléments sur certains de ces personnages : boucles d'oreille, barbe, nœud papillon. Combien de questions faut-il poser pour être sûr de pouvoir trouver ?

On joue à ce jeu avec les éléments supplémentaires et en rajoutant la règle suivante : le joueur qui a choisi le personnage secret a le droit de mentir au plus une fois en répondant aux questions. Ces question sont, dans l'ordre :



A-t-il. . .

(1) des lunettes ?

(2) une moustache ?

(3) un chapeau ?

(4) des cheveux ?

(5) des boucles d'oreille ?

(6) une barbe ?

(7) un nœud papillon ?

4. **Quel vous semble être le nombre minimal de différences entre deux personnages distincts du jeu ?**
5. **Pourquoi cela permet-il de deviner le personnage secret, même si le joueur a menti une fois ?**

Voyons maintenant comment jouer à ce jeu avec mensonge, sans l'aide de l'ordinateur !

On représente chaque personnage par une suite de sept chiffres, 0 ou 1. Le troisième personnage, celui qui a des lunettes, pas de moustache, un chapeau, des cheveux, pas de boucle d'oreille, une barbe, pas de nœud papillon, sera ainsi représenté par 1011010**. On code les réponses du joueur aux questions de la même façon, par exemple si j'ai choisi le personnage numéro 3 et que je mens à la question « a-t-il une boucle d'oreille ? », ma réponse sera** 1011110**.**
On reçoit une réponse. Pour savoir si elle est correcte ou mensongère, on va calculer trois nombres, les « syndromes » qui valent chacun 0 ou 1.

- s_1 **: on garde un chiffre sur deux** □×□×□×□ **on en fait la somme.** s_1 **vaut 0 si la somme est paire, 1 si elle est impaire.**
- s_2 **:** ×□□×□□×**, on fait la somme,** s_2 **vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.**
- s_3 **:** ×××□□□□ **(que les quatre derniers chiffres), on fait la somme,** s_3 **vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.**

Exemple : Si la réponse obtenue est 0011110**, on a**

$$s_1 = 0,\ \ s_2 = 1,\ \ s_3 = 1.$$

6. **Le joueur répond sans mensonge. Calculer, pour chaque personnage, s_1, s_2 et s_3.**
7. **Que valent s_1, s_2 et s_3 si on ment à la première question et pas aux autres ?**
8. **Et si on ment seulement à la cinquième question ?**
9. **Comment le tableau ci-contre permet-il de découvrir facilement à quelle question le joueur a menti ?**

	1	2	3	4	5	6	7
s_1	1	0	1	0	1	0	1
s_2	0	1	1	0	1	1	0
s_3	0	0	0	1	1	1	1

10. **Que va-t-il se passer si le joueur ment deux fois ?**
11. **Voyez-vous comment, en ajoutant une caractéristique sur certains des 16 personnages (un piercing dans le nez, par exemple) et une question correspondante, on pourrait détecter si le joueur a triché et menti deux fois ?**

Le principe sur lequel repose ce jeu est en fait à la base d'applications très utiles, pour transmettre ou stocker des données. Disons que les données transmises sont des paquets de 0 et de 1. Lors de la transmission, que ce soit par ondes radio, par câble ou autre, des erreurs sont susceptibles de se produire et le message reçu n'est plus parfaitement conforme à celui qui a été envoyé (les erreurs jouent le rôle des mensonges de notre jeu). En envoyant, en plus de l'information de départ, une information supplémentaire redondante, on va être capable de dire s'il y a eu ou non des erreurs lors de la transmission et de les corriger s'il n'y en a pas eu trop. C'est exactement le même principe que quand des pilotes d'avion disent « Alpha, Charlie, Tango » pour dire « A, C, T » mais avec plus d'algèbre !

Qui est-ce ?

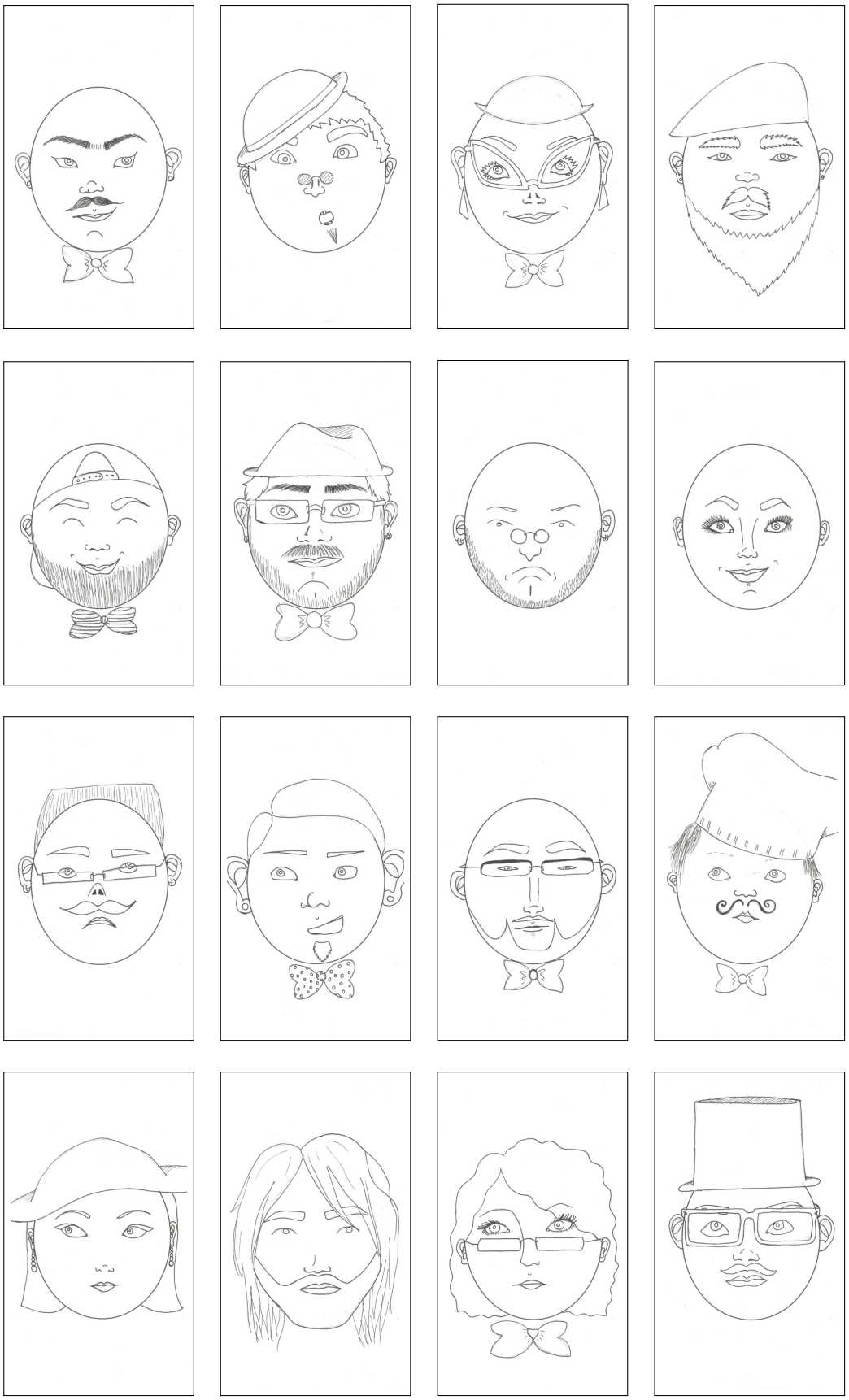


Une introduction aux codes correcteurs d'erreurs

Sur une feuille sont dessinés des personnages, qui se distinguent selon 4 éléments, qu'ils possèdent ou non : des lunettes, une moustache, un chapeau, des cheveux. Tous les personnages sont différents (par exemple, il ne peut pas y en avoir deux avec des lunettes, pas de moustache ni de chapeau et des cheveux). Un joueur choisit secrètement un des personnages. L'autre joueur doit deviner duquel il s'agit en posant des questions, auxquelles l'autre ne peut répondre que par « oui » ou « non », du type « a-t-il des cheveux ? ». Tous les personnages possibles sont dessinés dans le jeu.

1. Combien de personnages y a-t-il ?
2. Combien faut-il poser de questions pour être sûr de pouvoir trouver ?
3. On rajoute maintenant des éléments sur certains de ces personnages : boucles d'oreille, barbe, nœud papillon. Combien de questions faut-il poser pour être sûr de pouvoir trouver ?

On joue à ce jeu avec les éléments supplémentaires et en rajoutant la règle suivante : le joueur qui a choisi le personnage secret a le droit de mentir au plus une fois en répondant aux questions. Ces questions sont, dans l'ordre :



A-t-il...

(1) des lunettes ?

(2) une moustache ?

(3) un chapeau ?

(4) des cheveux ?

(5) des boucles d'oreille ?

(6) une barbe ?

(7) un nœud papillon ?

4. **Quel vous semble être le nombre minimal de différences entre deux personnages distincts du jeu ?**
5. **Pourquoi cela permet-il de deviner le personnage secret, même si le joueur a menti une fois ?**

Voyons maintenant comment jouer à ce jeu avec mensonge, sans l'aide de l'ordinateur !

On représente chaque personnage par une suite de sept chiffres, 0 ou 1. Le troisième personnage, celui qui a des lunettes, pas de moustache, un chapeau, des cheveux, pas de boucle d'oreille, une barbe, pas de nœud papillon, sera ainsi représenté par 1011010**. On code les réponses du joueur aux questions de la même façon, par exemple si j'ai choisi le personnage numéro 3 et que je mens à la question « a-t-il des boucles d'oreille ? », ma réponse sera** 1011110**.**
On reçoit une réponse. Pour savoir si elle est correcte ou mensongère, on va calculer trois nombres, les « syndromes » qui valent chacun 0 ou 1.

s_1 **: on garde un chiffre sur deux** □×□×□×□ **on en fait la somme.** s_1 **vaut 0 si la somme est paire, 1 si elle est impaire.**

s_2 **:** ×□□×□□×**, on fait la somme,** s_2 **vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.**

s_3 **:** ×××□□□□ **(que les quatre derniers chiffres), on fait la somme,** s_3 **vaut 0 si elle est paire, 1 si elle est impaire.**

Exemple : Si la réponse obtenue est 0011110**, on a**

$$s_1 = 0,\ \ s_2 = 1,\ \ s_3 = 1.$$

6. **Le joueur répond sans mensonge. Calculer, pour chaque personnage, s_1, s_2 et s_3.**
7. **Que valent s_1, s_2 et s_3 si on ment à la première question et pas aux autres ?**
8. **Et si on ment seulement à la cinquième question ?**
9. **Comment le tableau ci-dessous permet-il de découvrir facilement à quelle question le joueur a menti ?**

	1	2	3	4	5	6	7
s_1	1	0	1	0	1	0	1
s_2	0	1	1	0	1	1	0
s_3	0	0	0	1	1	1	1

Le principe sur lequel repose ce jeu est en fait à la base d'applications très utiles, pour transmettre ou stocker des données. Disons que les données transmises sont des paquets de 0 et de 1. Lors de la transmission, que ce soit par ondes radio, par câble ou autre, des erreurs sont susceptibles de se produire et le message reçu n'est plus parfaitement conforme à celui qui a été envoyé (les erreurs jouent le rôle des mensonges de notre jeu). En envoyant, en plus de l'information de départ, une information supplémentaire redondante, on va être capable de dire s'il y a eu ou non des erreurs lors de la transmission et de les corriger s'il n'y en a pas eu trop. C'est exactement le même principe que quand des pilotes d'avion disent « Alpha, Charlie, Tango » pour dire « A, C, T » mais avec plus de mathématiques !

Qui est-ce ?



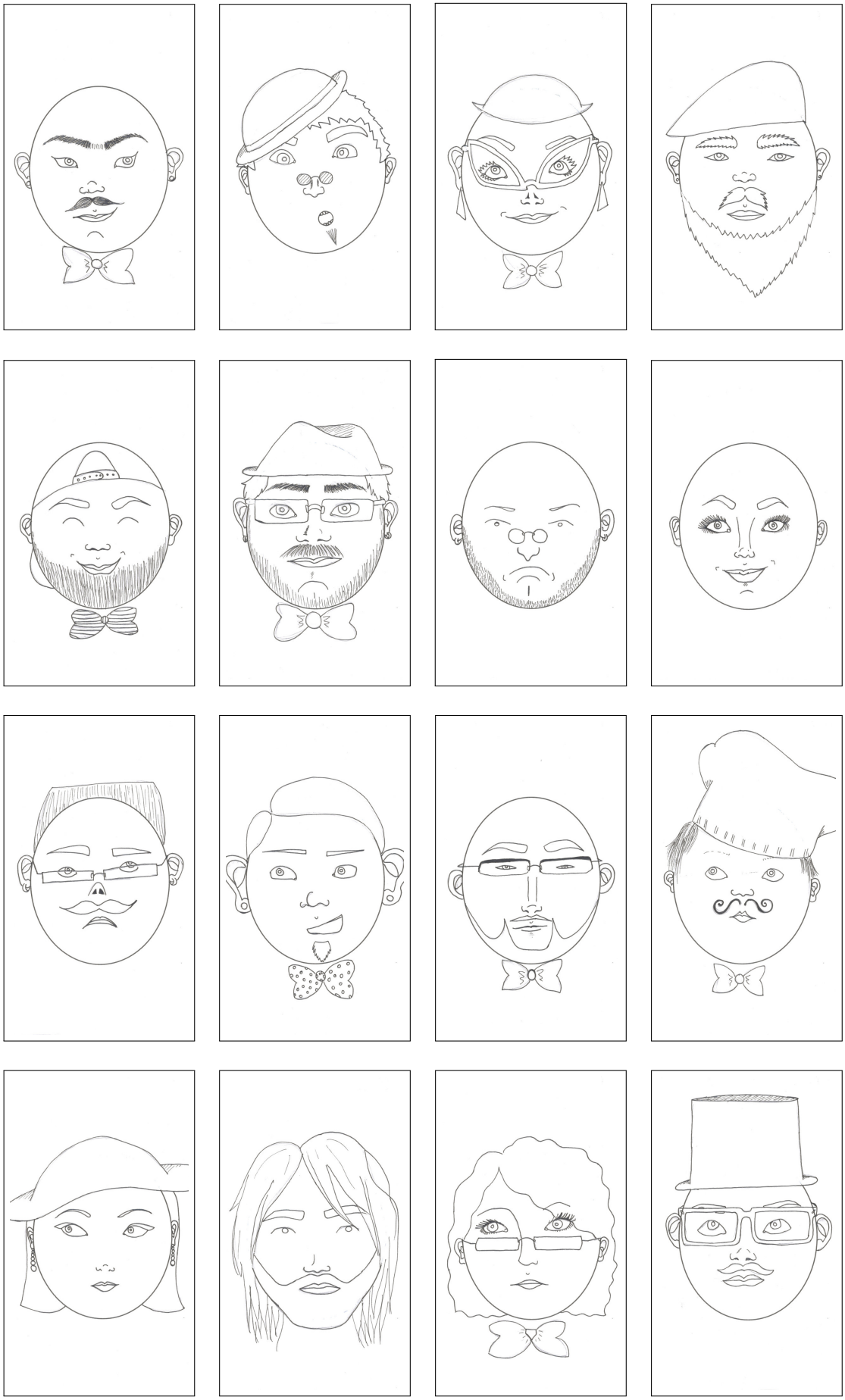
Une introduction aux codes correcteurs d'erreurs

Sur une feuille sont dessinés des personnages, qui se distinguent selon 4 éléments, qu'ils possèdent ou non : des lunettes, une moustache, un chapeau, des cheveux. Tous les personnages sont différents (par exemple, il ne peut pas y en avoir deux avec des lunettes, pas de moustache ni de chapeau et des cheveux). Un joueur choisit secrètement un des personnages. L'autre joueur doit deviner duquel il s'agit en posant des questions, auxquelles l'autre ne peut répondre que par « oui » ou « non », du type « a-t-il des cheveux ? ». Tous les personnages possibles sont dessinés dans le jeu.

1. Combien de personnages y a-t-il ?
2. Combien faut-il poser de questions pour être sûr de pouvoir trouver ?

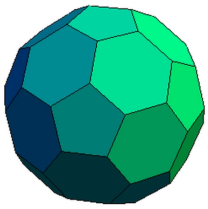
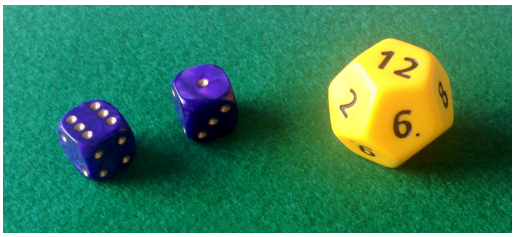
On ne va pas vraiment jouer à ce jeu, il est trop facile et pas très drôle ! On ajoute quelques éléments sur nos personnages et on a maintenant avoir le droit de mentir, au plus une fois en répondant aux questions.

Voici tous les personnages du jeu :



3. **Combien aurait-on pu dessiner de personnages différents ayant ou n'ayant pas de lunettes, moustache, chapeau, cheveux, boucles d'oreille, barbe, noeud papillon ? Sont-ils tous représentés dans le jeu ?**
4. **Quel vous semble être le nombre minimal de différences entre deux personnages distincts du jeu ?**
5. **Pourquoi cela permet-il de deviner le personnage secret, même si le joueur a menti une fois ?**

Probabilités et football

À la découverte des probabilités

⚀ On joue avec deux dés à 6 faces. Essayez de trouver intuitivement quelle est la probabilité :

- d'obtenir un ⚀ avec un dé à 6 faces ?
- de ne pas obtenir un ⚀ avec un dé à 6 faces ?
- d'obtenir ⚀⚀ en lançant deux dés à 6 faces ?
- d'obtenir un total de 5 en lançant deux dés à 6 faces ?
- d'obtenir un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?

⚀ On joue maintenant avec un dé à 12 faces. Intuitivement quelle est la probabilité d'obtenir un 2 ?

⚂ **Si on lance un certain nombre de fois les deux dés à 6 faces, en notant la somme des 2 dés, puis qu'on lance le même nombre de fois le dé à 12 faces, pensez-vous que les différents résultats possibles apparaissent à peu près le même nombre de fois ?**

⚃ **Vous allez maintenant lancer ces trois dés.**

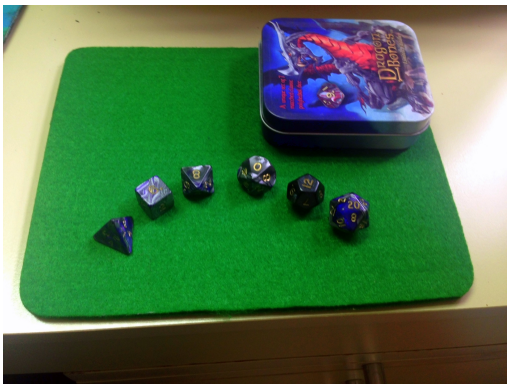
- **Notez dans le tableau 1 les résultats obtenus pour la somme des deux dés à 6 faces et pour le dé à 12 faces. Répétez l'expérience jusqu'à ce que le tableau soit rempli.**
- **Comptez le nombre de fois où apparaît chacun des nombres 1, 2, . . . 12, pour le dé à 12 faces d'une part et pour la somme des résultats des dés à 6 faces d'autre part, et complétez le tableau 2.**
- **Si vous divisez le nombre de fois où vous avez obtenu un résultat par le nombre de lancers de dés effectués, vous obtenez la fréquence de ce résultat. Calculez les fréquences pour les résultats du tableau précédent et complétez le tableau 3.**

⚄ **Utilisez le tableau des fréquences (tableau 3) pour répondre aux questions suivantes, et comparez vos réponses avec celles données intuitivement au début. Quelle est la fréquence d'apparition :**

- **du résultat 2 avec un dé à 12 faces ?**
- **de ⚀⚀ en lançant deux dés à 6 faces ?**
- **d'un total de 5 avec deux dés à 6 faces ?**
- **d'un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?**

Les fréquences des différents résultats sur la somme de deux dés à 6 faces et sur le dé à 12 faces sont-elles les mêmes ?

🎲 **Les fréquences de buts marqués par rapport au nombre de tirs des équipes de Ligue 1 lors de la saison 2014/2015 sont données dans le tableau 4. On peut imaginer que les lancers de dés représentent les tirs d'une équipe, et qu'obtenir un nombre particulier, par exemple le 1, signifie que l'équipe marque un but. Si vous avez le choix entre des dés avec 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 et 20 faces, complétez le tableau 4 en rajoutant le nombre de faces du dé que vous utiliseriez pour modéliser les tirs !**



⚽⚽⚽

Le paradoxe des anniversaires

Parfois, on peut avoir une bonne intuition à propos des probabilités des événements. Mais attention, il existe plein de résultats qui ne sont pas du tout intuitifs ! L'un d'entre eux concerne le "paradoxe des anniversaires".

⚀ À votre avis, sans aucun calcul, combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que la vôtre ?
S'il y a 30 personnes, pensez-vous qu'il est probable que quelqu'un partage votre date d'anniversaire ?

⚁ À votre avis, toujours sans calculs, combien de personnes doivent être réunies pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?
Si 30 personnes sont réunies, pensez-vous qu'il soit probable qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?

⚃ Vous avez à votre disposition les tables des dates de naissance des joueurs de la coupe du monde de football 2014. Dans chaque équipe, il y a 30 joueurs.

- Dans combien d'équipes y a-t-il un joueur ayant la même

date d'anniversaire que vous ?

- **Pouvez-vous en déduire une estimation de la probabilité que quelqu'un partage votre date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?**

⚄ **Reprenez les tables des dates de naissance des joueurs.**

- **Dans combien d'équipes y a-t-il au moins 2 joueurs ayant la même date d'anniversaire ?**
- **Pouvez-vous en déduire une estimation de la probabilité qu'au moins deux personnes partagent la même date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?**

Ces estimations sont-elles proches de vos prévisions ?

⚄ **Question bonus (y réfléchir chez vous !) :**
Le tableau ci-dessous donne les probabilités correspondant à des groupes de différentes tailles. En regardant les valeurs des probabilités pour des petits groupes (de 2 à 5 personnes), et en utilisant les réponses des questions précédentes, essayez de trouver comment ces probabilités ont été calculées !

Nombre de personnes dans le groupe	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**	**20**	**23**	**50**
Chance que quelqu'un ait votre date d'anniversaire	0,5 %	0,8 %	1,1 %	1,4 %	2,7 %	5,3 %	6,1 %	12,8 %
Chance que 2 personnes aient la même date d'anniversaire	0,3 %	0,8 %	1,6 %	2,7 %	11,7 %	41,1 %	50,7 %	97 %

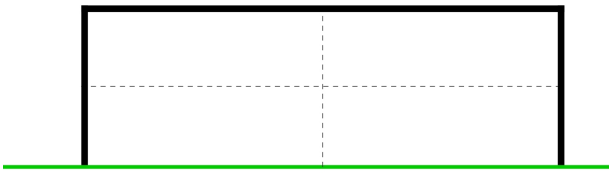


Tirs au but : une introduction à la modélisation mathématique

Le tableau suivant indique le nombre de tirs au but durant les trois dernières années de la Ligue 1 (en France) et des trois dernières finales de Coupe du monde, et le calcul des fréquences correspondantes !

	Ligue 1 14/15	Ligue 1 13/14	Ligue 1 12/13	WC2014	WC2010	WC2006
Tirs au but tentés	126	79	71	36	32	26
Tirs au but réussis	103	66	64	26	23	38
Fréquence (en %)	81,75%	83,54%	90,14%	72,22%	71,88%	68,42%

En fait, dans la plupart des ligues et championnats de football, environ 70 % à 80 % de tirs au but se transforment en buts. Essayons, par une modélisation probabiliste simple, de retrouver l'ordre de grandeur de ces chiffres.



⊡ **Imaginez le scenario suivant : la cage est divisée en 4 zones, et le gardien arrête le tir s'il devine dans quelle partie de la cage le tireur envoie le ballon - sinon, le tir au but est réussi et le but est marqué !**

- **Quelle est la probabilité que le gardien devine où il doit se placer pour arrêter le tir ?**

- **Quelle est la probabilité de marquer un but dans ce scénario simple ?**

- **Les hypothèses de ce scénario sont-elles réalistes ? Que manque-t-il ?**

⚀ **D'après vous, du point de vue du gardien, en combien de zones est-il raisonnable de considérer que la cage est divisée ? Le symbole ⚽ va représenter ce nombre.**

Devant vous se trouvent des perles en plastique de deux couleurs. Prenez ⚽−1 perles de couleur 1 et 1 perle de couleur 2 et mettez-les dans la première boîte. La perle de couleur 2 représente le gardien arrêtant le but.

Si vous fermez les yeux et que vous choisissez une perle dans la boîte, quelle est la probabilité de tirer une perle de couleur 1 ?

⚁ **En plus du gardien arrêtant le ballon, pour quelle autre raison un tir au but peut ne pas être marqué ? Pensez à Zlatan Ibrahimović ou à David Trézéguet...**

Évidemment, chez les professionnels, il est peu probable qu'un joueur manque la cage. Choisissez un pourcentage dans le tableau ci-dessous et prenez le nombre de perles correspondant. Mettez-les dans la deuxième boîte. Les perles de couleur 2 représentent les loupés.

Pourcentage de tirs loupés	2 %	4 %	5 %	6 %	8 %	10 %
Nombre de perles de couleur 1	49	24	19	47	23	9
Nombre de perles de couleur 2	1	1	1	3	2	1

⚄ Maintenant, fermez les yeux et tirez une perle dans la "boîte du tireur". Si la perle tirée est de couleur 2, le tireur a loupé la cage et le but n'est pas marqué. Sinon, tirez une perle dans la "boîte du gardien". Si celle-ci est de couleur 1, cela correspond dans notre modèle à un but marqué ; si elle est de couleur 2, cela correspond à un but loupé. Notez le résultat du tirage dans le tableau 6, remettez les perles dans leurs boîtes de départ et recommencez l'expérience 30 fois.

- Quel est le nombre de "buts marqués" sur ces 30 essais ?
- Quelle est la fréquence des tirs au but transformés dans notre modèle ? Comparez ce nombre aux pourcentages annoncés au début !

⚄ Si la probabilité que le gardien fasse le mauvais choix est p et que la probabilité que le tireur ne manque pas la cage est q, quelle est la probabilité que le but soit marqué ? Vous pouvez utilisez la fréquence obtenue à la question ⚄ ci-dessus pour trouver la réponse à cette question.

⚽⚽⚽

Cotes et coefficients de paris

Il existe différentes sortes de paris sportifs sur le football. Quand on parie, un nombre appelé coefficient dit quelle sera la somme gagnée si le pari est remporté. Dans la mesure où les résultats des matchs ne sont pas connus à l'avance, les coefficients sont calculés à l'aide des probabilités. Nous allons voir quels sont les liens entre probabilités, cotes et coefficients.

⊡ Imaginez que vous pariez sur le résultat d'un lancer de pièce avec quelqu'un, vous pariez sur "face" et votre adversaire parie sur "pile".

- **Quelle est la probabilité que vous remportiez le pari ? Et votre adversaire ?**
- **Combien y a-t-il de résultats possibles à ce pari ?**

On dit que votre *cote* dans ce jeu est donnée par le rapport

$$\textit{nombre de résultats possibles en votre faveur} \;:\; \textit{nombre de résultats possibles en votre défaveur.}$$

- **Quelle est votre cote dans ce jeu ?**
- **Si vous pariez une somme ☺ sur un lancer de pièce, et que le gagnant remporte les 2 mises, quelle somme votre**

adversaire doit parier pour que le jeu soit équitable ? Exactement ☺, plus que ☺ ou moins que ☺ ?

- **Dans le cas où ☺=1, quelle somme récupérez-vous si vous gagnez le pari (en comptant votre mise et celle de l'adversaire) ? Et si vous misez une somme ☺ quelconque ?**

On appelle *coefficient* de votre pari le nombre c tel que vous récupérez c fois votre mise lorsque vous gagnez.

- **Quel est le lien entre la probabilité que vous remportiez le pari et votre coefficient de pari ?**

On admet que cette relation reste vraie si la probabilité que vous gagniez est p et non plus $1/2$. Dans la suite, on va vérifier cette relation à partir des fréquences.

⚀ **Dans la dernière saison de Ligue 1, 88 des 380 matchs se sont terminés par un nul, soit 23%. L'année précédente, c'était 107 matchs sur 380, soit 28%. Ces chiffres ne sont pas inhabituels : en football professionnel, environ 20 à 30% des matchs se finissent sur un nul. Imaginez qu'on vous propose de parier qu'un match se finisse sur un nul, mais vous ne savez pas quelles sont les équipes qui jouent ce match. On modélise le problème en fixant à 25% votre probabilité de gagner votre pari, ce qui semble raisonnable.**

- Quelle est la cote correspondante ?
- Quel est le coefficient (pour un jeu équitable) correspondant ? On le notera ⚽.

🎲 Les sites de paris proposent en principe des coefficients plus bas que si le jeu était équitable, de façon à gagner de l'argent. Nous allons utiliser un dé à 12 faces pour tester ce qu'on gagne ou perd si on prend un coefficient égal à ⚽ et si on prend un coefficient égal ⚽-0,4.
Sur les 12 résultats possibles du dé, les résultats de 1 à 3 vont représenter des matchs se finissant sur un nul.

- Lancez le dé à 12 faces 30 fois et notez les résultats obtenus dans le tableau 7.
- Combien de "matchs nuls" avez-vous obtenus ?
- Si vous aviez parié la somme 1 sur chaque match, combien auriez-vous gagné ou perdu avec le coefficient de pari ⚽ ? Et avec le coefficient ⚽-0,4 ?

⚽⚽⚽

université PARIS DIDEROT PARIS 7 · UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS · cnrs dépasser les frontières · IREM PARIS

Tableau 1

Lancer n°	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
dé à 12 faces	2	9	12	8	4	2	12	3	5	2
somme des 2 dés à 6 faces	7	7	6	9	7	8	4	7	5	12
Lancer n°	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
dé à 12 faces	3	11	5	8	8	1	1	1	9	9
somme des 2 dés à 6 faces	4	2	6	5	7	10	8	7	8	7
Lancer n°	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
dé à 12 faces										
somme des 2 dés à 6 faces										

Tableau 2

Nombre obtenu avec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
le dé à 12 faces												
la somme des 2 dés à 6 faces												

Tableau 3

Fréquence du résultat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sur un dé à 12 faces												
Sur la somme des 2 dés à 6 faces												

Tableau 4

Equipe	Buts	Tirs	Fréquence	Meilleur dé
Paris SG (M,L)	83	491	16,90%	
Olympique Lyon	72	524	13,74%	
Olympique Marseille	76	579	13,13%	
FC Evian T. G.	41	334	12,28%	
SM Caen (N)	54	462	11,69%	
HSC Montpellier	46	396	11,62%	
SC Bastia	37	320	11,56%	
AS Saint-Etienne	51	443	11,51%	
EA Guingamp (P)	41	359	11,42%	
AS Monaco	51	452	11,28%	
Stade Reims	47	441	10,66%	
OGC Nizza	44	418	10,53%	
FC Toulouse	43	431	9,98%	
Girondins Bordeaux	47	488	9,63%	
Stade Rennes	35	365	9,59%	
OSC Lille	43	463	9,29%	
FC Lorient	44	486	9,05%	
RC Lens (N)	32	411	7,79%	
FC Metz (N)	31	450	6,89%	
FC Nantes	29	424	6,84%	

Données issues de http://www.squawka.com/football-team-rankings

Tableau 5

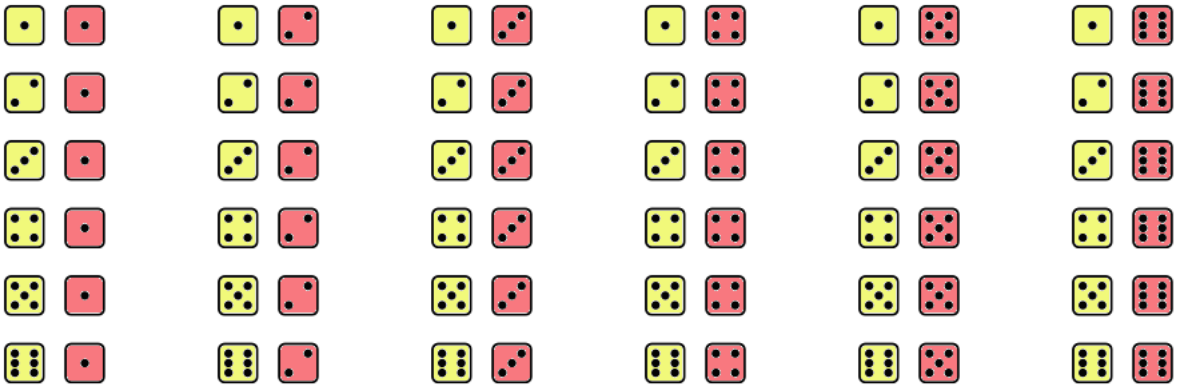
Fraction	Valeur exacte	Valeur approchée
1/4	0,25	
1/6		0,1667
1/8	0,125	
1/10	0,1	
1/12		0,0833
1/14		0,0714
1/16	0,0625	
1/18		0,0556
1/20	0,05	

Tableau 6

Lancer	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Résultat										
Lancer	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Résultat										
Lancer	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
Résultat										

Tableau 7

Lancer	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Résultat										
Lancer	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Résultat										
Lancer	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
Résultat										



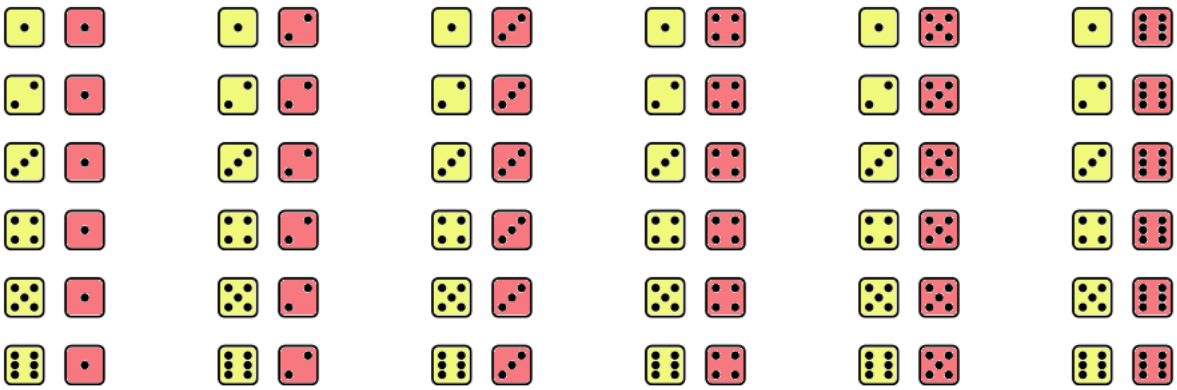
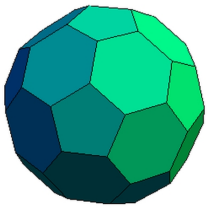
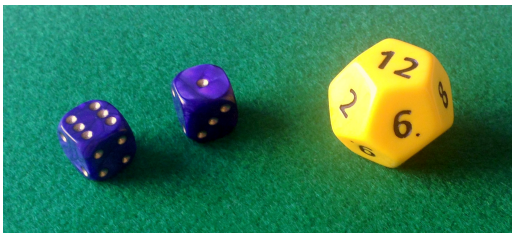


Table de valeurs approchées

n	Valeur approchée de $n/30$	Valeur approchée de $n/36$	Valeur approchée de $n/12$
1	**0,03**	**0,03**	**0,08**
2	**0,07**	**0,06**	**0,17**
3	**0,10**	**0,08**	**0,25**
4	**0,13**	**0,11**	**0,33**
5	**0,17**	**0,14**	**0,42**
6	**0,20**	**0,17**	**0,50**
7	**0,23**	**0,19**	**0,58**
8	**0,27**	**0,22**	**0,67**
9	**0,30**	**0,25**	**0,75**
10	**0,33**	**0,28**	**0,83**
11	**0,37**	**0,31**	**0,92**
12	**0,40**	**0,33**	**1**
13	**0,43**	**0,36**	
14	**0,47**	**0,39**	
15	**0,50**	**0,42**	
16	**0,53**	**0,44**	
17	**0,57**	**0,47**	
18	**0,60**	**0,50**	

Probabilités et football

À la découverte des probabilités

⚀ On joue avec deux dés à 6 faces. Essayez de trouver intuitivement quelle est la probabilité :

- d'obtenir un ⚀ avec un dé à 6 faces ?
- de ne pas obtenir un ⚀ avec un dé à 6 faces ?
- d'obtenir ⚀⚀ en lançant deux dés à 6 faces ?
- d'obtenir un total de 5 en lançant deux dés à 6 faces ?
- d'obtenir un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?

⚀ On joue maintenant avec un dé à 12 faces. Intuitivement quelle est la probabilité d'obtenir un 2 ?

⚂ **Si on lance un certain nombre de fois les deux dés à 6 faces, en notant la somme des 2 dés, puis qu'on lance le même nombre de fois le dé à 12 faces, pensez-vous que les différents résultats possibles apparaissent à peu près le même nombre de fois ?**

⚃ **Vous allez maintenant lancer ces trois dés.**

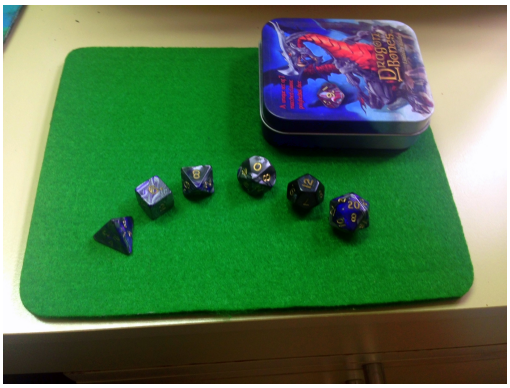
- **Notez dans le tableau 1 les résultats obtenus pour la somme des deux dés à 6 faces et pour le dé à 12 faces. Répétez l'expérience jusqu'à ce que le tableau soit rempli.**
- **Comptez le nombre de fois où apparaît chacun des nombres 1, 2, . . . 12, pour le dé à 12 faces d'une part et pour la somme des résultats des dés à 6 faces d'autre part, et complétez le tableau 2.**
- **Si vous divisez le nombre de fois où vous avez obtenu un résultat par le nombre de lancers de dés effectués, vous obtenez la fréquence de ce résultat. Calculez les fréquences pour les résultats du tableau précédent et complétez le tableau 3.**

⚄ **Utilisez le tableau des fréquences (tableau 3) pour répondre aux questions suivantes, et comparez vos réponses avec celles données intuitivement au début. Quelle est la fréquence d'apparition :**

- **du résultat 2 avec un dé à 12 faces ?**
- **de ⚀⚀ en lançant deux dés à 6 faces ?**
- **d'un total de 5 avec deux dés à 6 faces ?**
- **d'un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?**

Les fréquences des différents résultats sur la somme de deux dés à 6 faces et sur le dé à 12 faces sont-elles les mêmes ?

🎲 **Les fréquences de buts marqués par rapport au nombre de tirs des équipes de Ligue 1 lors de la saison 2014/2015 sont données dans le tableau 4. On peut imaginer que les lancers de dés représentent les tirs d'une équipe, et qu'obtenir un nombre particulier, par exemple le 1, signifie que l'équipe marque un but. Si vous avez le choix entre des dés avec 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 et 20 faces, complétez le tableau 4 en rajoutant le nombre de faces du dé que vous utiliseriez pour modéliser les tirs !**



⚽⚽⚽

Le paradoxe des anniversaires

Parfois, on peut avoir une bonne intuition à propos des probabilités des événements. Mais attention, il existe plein de résultats qui ne sont pas du tout intuitifs ! L'un d'entre eux concerne le "paradoxe des anniversaires".

⚀ **À votre avis, sans aucun calcul, combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que la vôtre ?**
S'il y a 30 personnes, pensez-vous qu'il est probable que quelqu'un partage votre date d'anniversaire ?

⚁ **À votre avis, toujours sans calculs, combien de personnes doivent être réunies pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?**
Si 30 personnes sont réunies, pensez-vous qu'il soit probable qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?

⚄ **Vous avez à votre disposition les tables des dates de naissance des joueurs de la coupe du monde de football 2014. Dans chaque équipe, il y a 30 joueurs.**

- **Dans combien d'équipes y a-t-il un joueur ayant la même**

date d'anniversaire que vous ?

- **Pouvez-vous en déduire une estimation de la probabilité que quelqu'un partage votre date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?**

⚀ **Reprenez les tables des dates de naissance des joueurs.**

- **Dans combien d'équipes y a-t-il au moins 2 joueurs ayant la même date d'anniversaire ?**
- **Pouvez-vous en déduire une estimation de la probabilité qu'au moins deux personnes partagent la même date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?**

Ces estimations sont-elles proches de vos prévisions ?

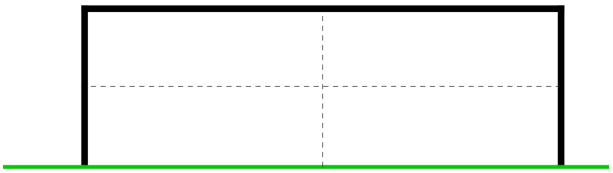
⚽⚽⚽

Tirs au but : une introduction à la modélisation mathématique

Le tableau suivant indique le nombre de tirs au but durant les trois dernières années de la Ligue 1 (en France) et des trois dernières finales de Coupe du monde, et le calcul des fréquences correspondantes !

	Ligue 1 14/15	Ligue 1 13/14	Ligue 1 12/13	WC2014	WC2010	WC2006
Tirs au but tentés	126	79	71	36	32	26
Tirs au but réussis	103	66	64	26	23	38
Fréquence (en %)	81,75%	83,54%	90,14%	72,22%	71,88%	68,42%

En fait, dans la plupart des ligues et championnats de football, environ 70 % à 80 % de tirs au but se transforment en buts. Essayons, par une modélisation probabiliste simple, de retrouver l'ordre de grandeur de ces chiffres.



⊡ **Imaginez le scenario suivant : la cage est divisée en 4 zones, et le gardien arrête le tir s'il devine dans quelle partie de la cage le tireur envoie le ballon - sinon, le tir au but est réussi et le but est marqué !**

- **Quelle est la probabilité que le gardien devine où il doit se placer pour arrêter le tir ?**
- **Quelle est la probabilité de marquer un but dans ce scénario simple ?**
- **Les hypothèses de ce scénario sont-elles réalistes ? Que manque-t-il ?**

⚀ **D'après vous, du point de vue du gardien, en combien de zones est-il raisonnable de considérer que la cage est divisée ? Le symbole ⚽ va représenter ce nombre.**

Devant vous se trouvent des perles en plastique de deux couleurs. Prenez ⚽-1 perles de couleur 1 et 1 perle de couleur 2 et mettez-les dans la première boîte. La perle de couleur 2 représente le gardien arrêtant le but.

Si vous fermez les yeux et que vous choisissez une perle dans la boîte, quelle est la probabilité de tirer une perle de couleur 1 ?

⚁ **En plus du gardien arrêtant le ballon, pour quelle autre raison un tir au but peut ne pas être marqué ? Pensez à Zlatan Ibrahimović ou à David Trézéguet...**

Évidemment, chez les professionnels, il est peu probable qu'un joueur manque la cage. Choisissez un pourcentage dans le tableau ci-dessous et prenez le nombre de perles correspondant. Mettez-les dans la deuxième boîte. Les perles de couleur 2 représentent les loupés.

Pourcentage de tirs loupés	2 %	4 %	5 %	6 %	8 %	10 %
Nombre de perles de couleur 1	49	24	19	47	23	9
Nombre de perles de couleur 2	1	1	1	3	2	1

⚄ Maintenant, fermez les yeux et tirez une perle dans la "boîte du tireur". Si la perle tirée est de couleur 2, le tireur a loupé la cage et le but n'est pas marqué. Sinon, tirez une perle dans la "boîte du gardien". Si celle-ci est de couleur 1, cela correspond dans notre modèle à un but marqué ; si elle est de couleur 2, cela correspond à un but loupé. Notez le résultat du tirage dans le tableau 6, remettez les perles dans leurs boîtes de départ et recommencez l'expérience 30 fois.

- Quel est le nombre de "buts marqués" sur ces 30 essais ?
- Quelle est la fréquence des tirs au but transformés dans notre modèle ? Comparez ce nombre aux pourcentages annoncés au début !

⚄ Si la probabilité que le gardien fasse le mauvais choix est p et que la probabilité que le tireur ne manque pas la cage est q, quelle est la probabilité que le but soit marqué ? Vous pouvez utilisez la fréquence obtenue à la question ⚄ ci-dessus pour trouver la réponse à cette question.

⚽⚽⚽

université PARIS DIDEROT PARIS 7 · UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS · cnrs dépasser les frontières · IREM PARIS

Tableau 1

Lancer n°	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
dé à 12 faces	2	9	12	8	4	2	12	3	5	2
somme des 2 dés à 6 faces	7	7	6	9	7	8	4	7	5	12
Lancer n°	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
dé à 12 faces	3	11	5	8	8	1	1	1	9	9
somme des 2 dés à 6 faces	4	2	6	5	7	10	8	7	8	7
Lancer n°	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
dé à 12 faces										
somme des 2 dés à 6 faces										

Tableau 2

Nombre obtenu avec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
le dé à 12 faces												
la somme des 2 dés à 6 faces												

Tableau 3

Fréquence du résultat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sur un dé à 12 faces												
Sur la somme des 2 dés à 6 faces												

Tableau 4

Equipe	Buts	Tirs	Fréquence	Meilleur dé
Paris SG (M,L)	83	491	16,90%	
Olympique Lyon	72	524	13,74%	
Olympique Marseille	76	579	13,13%	
FC Evian T. G.	41	334	12,28%	
SM Caen (N)	54	462	11,69%	
HSC Montpellier	46	396	11,62%	
SC Bastia	37	320	11,56%	
AS Saint-Etienne	51	443	11,51%	
EA Guingamp (P)	41	359	11,42%	
AS Monaco	51	452	11,28%	
Stade Reims	47	441	10,66%	
OGC Nizza	44	418	10,53%	
FC Toulouse	43	431	9,98%	
Girondins Bordeaux	47	488	9,63%	
Stade Rennes	35	365	9,59%	
OSC Lille	43	463	9,29%	
FC Lorient	44	486	9,05%	
RC Lens (N)	32	411	7,79%	
FC Metz (N)	31	450	6,89%	
FC Nantes	29	424	6,84%	

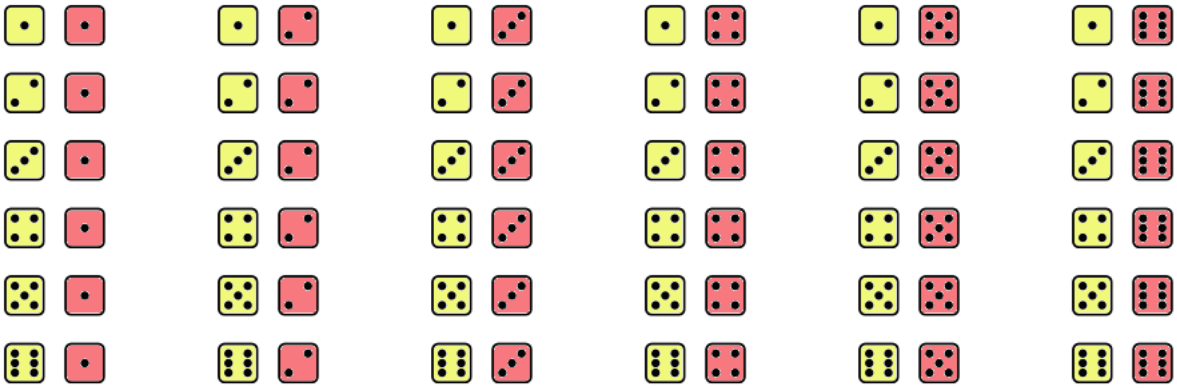
Données issues de http://www.squawka.com/football-team-rankings

Tableau 5

Fraction	Valeur exacte	Valeur approchée
1/4	0,25	
1/6		0,1667
1/8	0,125	
1/10	0,1	
1/12		0,0833
1/14		0,0714
1/16	0,0625	
1/18		0,0556
1/20	0,05	

Tableau 6

Lancer	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Résultat										
Lancer	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**
Résultat										
Lancer	**21.**	**22.**	**23.**	**24.**	**25.**	**26.**	**27.**	**28.**	**29.**	**30.**
Résultat										



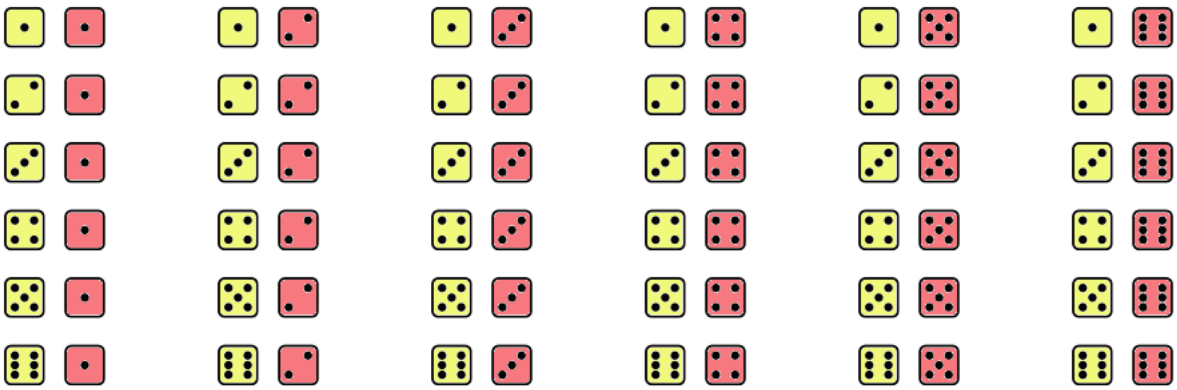
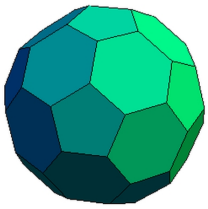
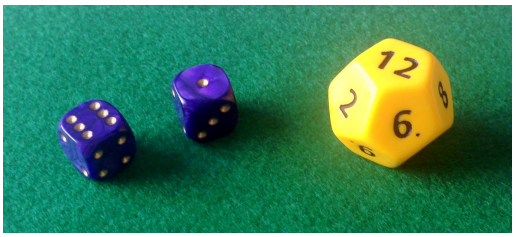


Table de valeurs approchées

n	Valeur approchée de $n/30$	Valeur approchée de $n/36$	Valeur approchée de $n/12$
1	**0,03**	**0,03**	**0,08**
2	**0,07**	**0,06**	**0,17**
3	**0,10**	**0,08**	**0,25**
4	**0,13**	**0,11**	**0,33**
5	**0,17**	**0,14**	**0,42**
6	**0,20**	**0,17**	**0,50**
7	**0,23**	**0,19**	**0,58**
8	**0,27**	**0,22**	**0,67**
9	**0,30**	**0,25**	**0,75**
10	**0,33**	**0,28**	**0,83**
11	**0,37**	**0,31**	**0,92**
12	**0,40**	**0,33**	**1**
13	**0,43**	**0,36**	
14	**0,47**	**0,39**	
15	**0,50**	**0,42**	
16	**0,53**	**0,44**	
17	**0,57**	**0,47**	
18	**0,60**	**0,50**	

Probabilités et football

À la découverte des probabilités

⚀ On joue avec deux dés à 6 faces. Essayez de trouver intuitivement quelle est la chance :

- d'obtenir un ⚀ avec un dé à 6 faces ?
- de ne pas obtenir un ⚀ avec un dé à 6 faces ?
- d'obtenir ⚀⚀ en lançant deux dés à 6 faces ?
- d'obtenir un total de 5 en lançant deux dés à 6 faces ?
- d'obtenir un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?

⚀ On joue maintenant avec un dé à 12 faces. Intuitivement quelle est la chance d'obtenir un 2 ?

⚂ **Si on lance un certain nombre de fois les deux dés à 6 faces, en notant la somme des 2 dés, puis qu'on lance le même nombre de fois le dé à 12 faces, pensez-vous que les différents résultats possibles apparaissent à peu près le même nombre de fois ?**

⚃ **Vous allez maintenant lancer ces trois dés.**

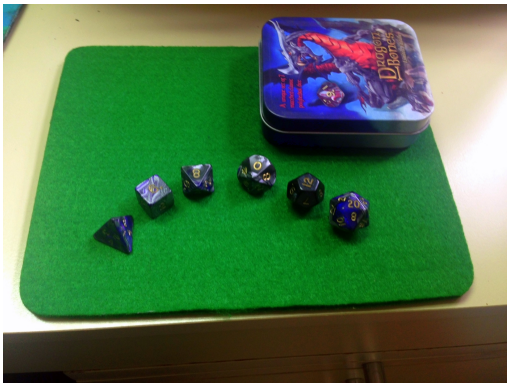
- **Notez dans le tableau 1 les résultats obtenus pour la somme des deux dés à 6 faces et pour le dé à 12 faces. Répétez l'expérience jusqu'à ce que le tableau soit rempli.**
- **Comptez le nombre de fois où apparaît chacun des nombres 1, 2, . . . 12, pour le dé à 12 faces d'une part et pour la somme des résultats des dés à 6 faces d'autre part, et complétez le tableau 2.**
- **Si vous divisez le nombre de fois où vous avez obtenu un résultat par le nombre de lancers de dés effectués, vous obtenez la fréquence de ce résultat. Calculez les fréquences pour les résultats du tableau précédent et complétez le tableau 3.**

⚄ **Utilisez le tableau des fréquences (tableau 3) pour répondre aux questions suivantes, et comparez vos réponses avec celles données intuitivement au début. Quelle est la fréquence d'apparition :**

- **du résultat 2 avec un dé à 12 faces ?**
- **de ⚀⚀ en lançant deux dés à 6 faces ?**
- **d'un total de 5 avec deux dés à 6 faces ?**
- **d'un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?**

Les fréquences des différents résultats sur la somme de deux dés à 6 faces et sur le dé à 12 faces sont-elles les mêmes ?

🎲 **Les fréquences de buts marqués par rapport au nombre de tirs des équipes de Ligue 1 lors de la saison 2014/2015 sont données dans le tableau 4. On peut imaginer que les lancers de dés représentent les tirs d'une équipe, et qu'obtenir un nombre particulier, par exemple le 1, signifie que l'équipe marque un but. Si vous avez le choix entre des dés avec 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 et 20 faces, complétez le tableau 4 en rajoutant le nombre de faces du dé que vous utiliseriez pour modéliser les tirs !**



⚽⚽⚽

Le paradoxe des anniversaires

Parfois, on peut avoir une bonne intuition à propos des chances qu'un événement se produise. Mais attention, il existe plein de résultats qui ne sont pas du tout intuitifs ! L'un d'entre eux concerne le "paradoxe des anniversaires".

⚀ À votre avis, sans aucun calcul, combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que la vôtre ?
S'il y a 30 personnes, pensez-vous qu'il est probable que quelqu'un partage votre date d'anniversaire ?

⚁ À votre avis, toujours sans calculs, combien de personnes doivent être réunies pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?
Si 30 personnes sont réunies, pensez-vous qu'il soit probable qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?

⚂ Vous avez à votre disposition les tables des dates de naissance des joueurs de la coupe du monde de football 2014. Dans chaque équipe, il y a 30 joueurs.

- **Dans combien d'équipes y a-t-il un joueur ayant la même date d'anniversaire que vous ?**

- **Pouvez-vous en déduire une estimation de la chance que quelqu'un partage votre date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?**

⚄ **Reprenez les tables des dates de naissance des joueurs.**

- **Dans combien d'équipes y a-t-il au moins 2 joueurs ayant la même date d'anniversaire ?**

- **Pouvez-vous en déduire une estimation de la chance qu'au moins deux personnes partagent la même date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?**

Ces estimations sont-elles proches de vos prévisions ?

⚽⚽⚽

université PARIS DIDEROT PARIS 7 · UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS · cnrs dépasser les frontières · IREM PARIS

Tableau 1

Lancer n°	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
dé à 12 faces	2	9	12	8	4	2	12	3	5	2
somme des 2 dés à 6 faces	7	7	6	9	7	8	4	7	5	12
Lancer n°	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
dé à 12 faces	3	11	5	8	8	1	1	1	9	9
somme des 2 dés à 6 faces	4	2	6	5	7	10	8	7	8	7
Lancer n°	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
dé à 12 faces										
somme des 2 dés à 6 faces										

Tableau 2

Nombre obtenu avec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
le dé à 12 faces												
la somme des 2 dés à 6 faces												

Tableau 3

Fréquence du résultat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sur un dé à 12 faces												
Sur la somme des 2 dés à 6 faces												

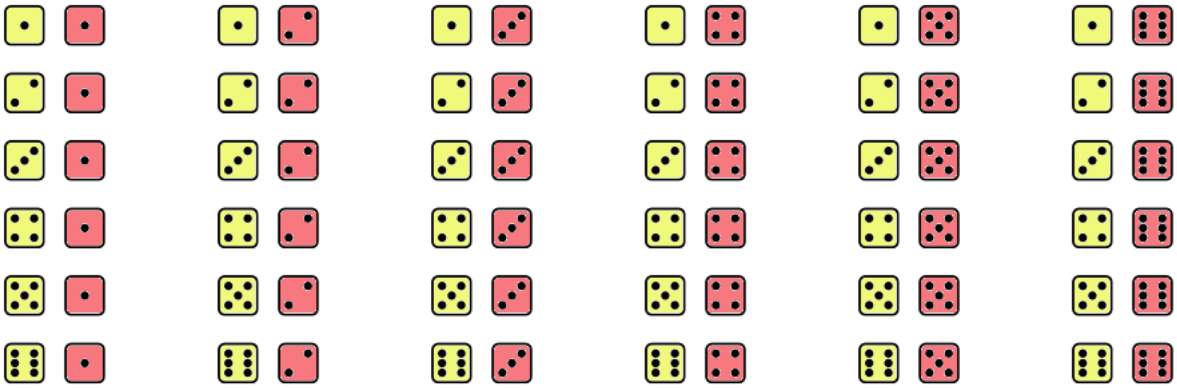
Tableau 4

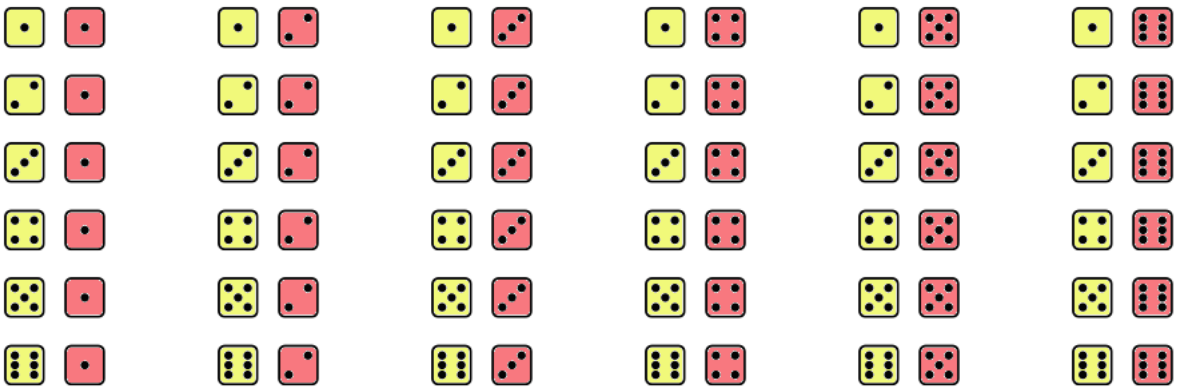
Equipe	Buts	Tirs	Fréquence	Meilleur dé
Paris SG (M,L)	83	491	16,90%	
Olympique Lyon	72	524	13,74%	
Olympique Marseille	76	579	13,13%	
FC Evian T. G.	41	334	12,28%	
SM Caen (N)	54	462	11,69%	
HSC Montpellier	46	396	11,62%	
SC Bastia	37	320	11,56%	
AS Saint-Etienne	51	443	11,51%	
EA Guingamp (P)	41	359	11,42%	
AS Monaco	51	452	11,28%	
Stade Reims	47	441	10,66%	
OGC Nizza	44	418	10,53%	
FC Toulouse	43	431	9,98%	
Girondins Bordeaux	47	488	9,63%	
Stade Rennes	35	365	9,59%	
OSC Lille	43	463	9,29%	
FC Lorient	44	486	9,05%	
RC Lens (N)	32	411	7,79%	
FC Metz (N)	31	450	6,89%	
FC Nantes	29	424	6,84%	

Données issues de http://www.squawka.com/football-team-rankings

Tableau 5

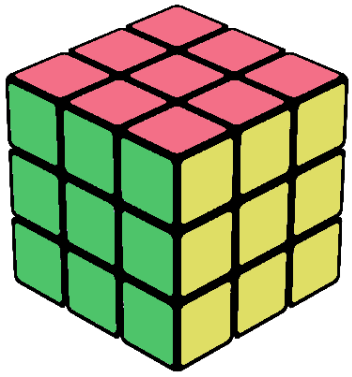
Fraction	Valeur exacte	Valeur approchée
1/4	0,25	
1/6		0,1667
1/8	0,125	
1/10	0,1	
1/12		0,0833
1/14		0,0714
1/16	0,0625	
1/18		0,0556
1/20	0,05	

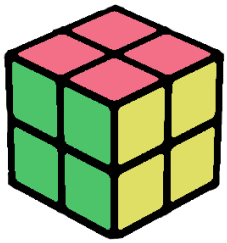




Rubik's cube

Voici les deux Rubik's cubes avec lesquels nous allons travailler sur ce stand. Le premier est le célèbre Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$ et le deuxième est le Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$.

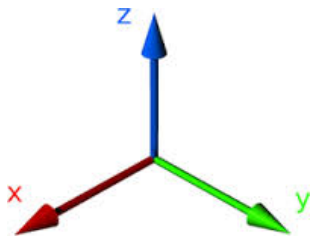


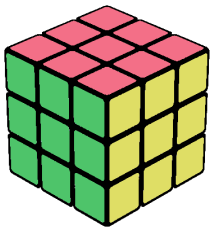


Question 0. Regardez attentivement les deux cubes (le $2 \times 2 \times 2$ et le $3 \times 3 \times 3$). Pouvez-vous remarquer un lien entre ces deux cubes ?

Question 1. Prenez un cube et repérez combien de mouvements simples vous pouvez effectuer avec.
Combien y en a-t-il : 3, 6, 9, 18 ?

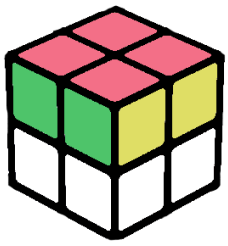
On appelle axe d'une rotation la direction autour de laquelle tourne une face du Rubik's cube lors d'un des mouvements énumérés à la première question.





Question 2. Maintenant que vous avez énumeré les mouvements, déterminez les axes de rotation du Rubik's cube.

Question 3. Manipulez un peu le cube $2 \times 2 \times 2$. Le but de cette question est de construire une face du Rubik's et sa couronne comme le montre l'image suivante. Essayez de construire une première face par vous-même pour commencer. Si vous avez besoin d'un coup de pouce, regardez la feuille Annexe.

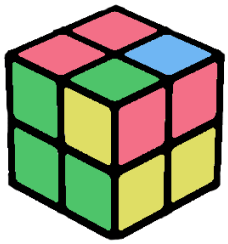


Nous allons maintenant résoudre le Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$. Pour cela, nous allons regarder le Rubik's cube sous un certain angle, et nous tâcherons de ne pas changer de point de vue par la suite. Pour résoudre ce Rubik's cube, il ne nous reste pas grande chose à faire. Il suffit maintenant de s'occuper des coins de la face du dessous.

Il faudra donc, dans un premier temps, positionner les coins du Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$ à leur place (mais pas forcément dans la bonne orientation), et ensuite, les orienter correctement. Voici deux étapes à suivre.

Étape 1. **Il s'agit ici de positionner les coins là où il faut, c'est-à-dire de telle façon que les trois couleurs du cube du coin en question correspondent aux trois couleurs des faces adjacentes (le petit cube du coin n'est pas forcément correctement orienté).**

Dans l'exemple ci-dessous, le coin rouge, vert et jaune, en haut vers l'avant sur le dessin, est considéré comme étant à la bonne place car ses faces sont des trois couleurs des faces adjacentes du Rubik's (mais il n'est pas dans la bonne position).



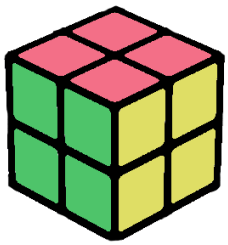
Vous devrez donc utiliser pour cela le Premier mouvement, qui échange deux coins et change l'orientation d'un troisième.

Question 4. Pouvez-vous décrire comment vous appliquez le Premier mouvement si 2 coins exactement sont déjà bien placés ? 1 seul coin ? 3 coins ? 0 coin ?

Etape 2. **Maintenant, il faut orienter les coins en utilisant le Deuxième mouvement qui change l'orientation de trois coins et laisse invariant le quatrième.**

Question 5. Pouvez-vous décrire comment vous appliquez le Deuxième mouvement si 1 seul coin est déjà bien orienté ? 2 coins ? 3 coins ? 0 coin ?

Félicitations, vous venez de résoudre le Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$!



Question 6. Pouvez-vous maintenant résoudre le Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$? Voici les différentes étapes :

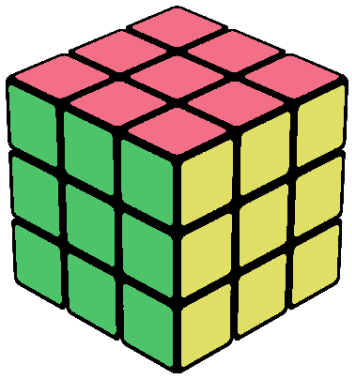
- **obtenez une face et sa couronne,**
- **placez puis orientez les coins du bas du cube en suivant les étapes 1 et 2 décrites ci-dessus,**
- **placez les cubes restants.**

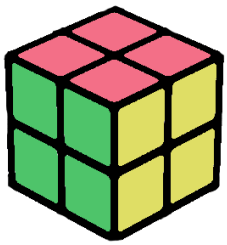
Pour vous aider, vous pouvez regarder la solution proposée dans l'Annexe.

université PARIS DIDEROT PARIS 7
UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS
cnrs dépasser les frontières
IREM PARIS

Rubik's cube

Voici les deux Rubik's cubes avec lesquels nous allons travailler sur ce stand. Le premier est le célèbre Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$ et le deuxième est le Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$.

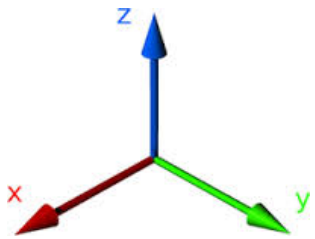


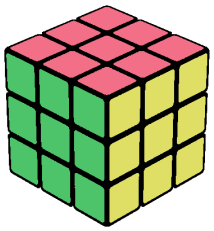


Question 0. Regardez attentivement les deux cubes (le $2 \times 2 \times 2$ et le $3 \times 3 \times 3$). Pouvez-vous remarquer un lien entre ces deux cubes ?

Question 1. Prenez un cube et repérez combien de mouvements simples vous pouvez effectuer avec.
Combien y en a-t-il : 3, 6, 9, 18 ?

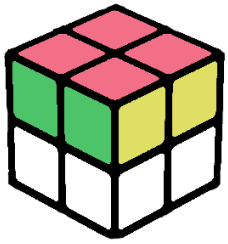
On appelle axe d'une rotation la direction autour de laquelle tourne une face du Rubik's cube lors d'un des mouvements énumérés à la première question.





Question 2. Maintenant que vous avez énumeré les mouvements, déterminez les axes de rotation du Rubik's cube.

Question 3. Manipulez un peu le cube $2 \times 2 \times 2$. Le but de cette question est de construire une face du Rubik's et sa couronne comme le montre l'image suivante. Essayez de construire une première face par vous-même pour commencer. Si vous avez besoin d'un coup de pouce, regardez la feuille Annexe.

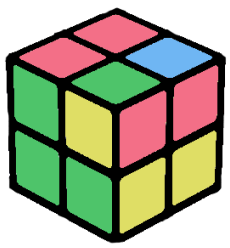


Le but de la suite est de résoudre le Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$. Pour cela, nous allons regarder le Rubik's cube sous un certain angle, et nous tâcherons de ne pas changer de point de vue par la suite. Pour résoudre ce Rubik's cube, il ne nous reste pas grande chose à faire. Il suffit maintenant de s'occuper des coins de la face du dessous.

Il faudra donc, dans un premier temps, positionner les coins du Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$ à leur place (mais pas forcément dans la bonne orientation), et ensuite, les orienter correctement. Voici deux étapes à suivre.

Étape 1. Il s'agit ici de positionner les coins là où il faut, c'est-à-dire de telle façon que les trois couleurs du cube du coin en question correspondent aux trois couleurs des faces adjacentes (le petit cube du coin n'est pas forcément correctement orienté).

Dans l'exemple ci-dessous, le coin rouge, vert et jaune, en haut vers l'avant sur le dessin, est considéré comme étant à la bonne place car ses faces sont des trois couleurs des faces adjacentes du Rubik's (mais il n'est pas dans la bonne position).

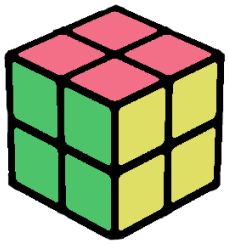


Vous devrez donc utiliser pour cela le Premier mouvement, qui échange deux coins et change l'orientation d'un troisième.

Question 4. Pouvez-vous décrire comment vous appliquez le Premier mouvement si 2 coins exactement sont déjà bien placés ? 1 seul coin ? 3 coins ? 0 coin ?

Etape 2. Maintenant, il faut orienter les coins en utilisant le Deuxième mouvement qui change l'orientation de trois coins et laisse invariant le quatrième.

Question 5. Pouvez-vous décrire comment vous appliquez le Deuxième mouvement si 1 seul coin est déjà bien orienté ? 2 coins ? 3 coins ? 0 coin ?

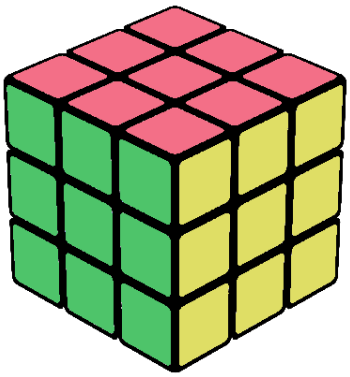


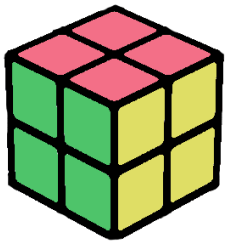
Félicitations, vous venez de résoudre le Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$! Si vous travaillez avec le Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$ vous pouvez commencer par placer tous les coins correctement et il ne vous restera que quelques étapes avant de voir votre joli Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$ complètement résolu !

université PARIS DIDEROT PARIS 7
UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS
cnrs dépasser les frontières
IREM PARIS

Rubik's cube

Voici les deux Rubik's cubes avec lesquels nous allons travailler sur ce stand. Le premier est le célèbre Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$ et le deuxième est le Rubik's cube $2 \times 2 \times 2$.

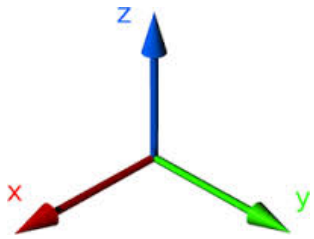


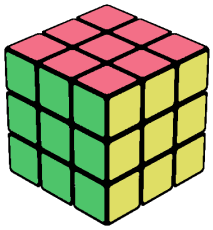


Question 0. Regardez attentivement les deux cubes (le $2 \times 2 \times 2$ et le $3 \times 3 \times 3$). Pouvez-vous remarquer un lien entre ces deux cubes ?

Question 1. Prenez un cube et repérez combien de mouvements simples vous pouvez effectuer avec.
Combien y en a-t-il : 3, 6, 9, 18 ?

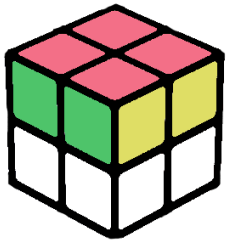
On appelle axe d'une rotation la direction autour de laquelle tourne une face du Rubik's cube lors d'un des mouvements énumérés à la première question.





Question 2. Maintenant que vous avez énumeré les mouvements, déterminez les axes de rotation du Rubik's cube.

Question 3. Manipulez un peu le cube $2 \times 2 \times 2$. Le but de cette question est de construire une face du Rubik's et sa couronne comme le montre l'image suivante. Essayez de construire une première face par vous-même. Si vous avez besoin d'un coup de pouce, regardez la feuille Annexe.



université PARIS DIDEROT PARIS 7
UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS
cnrs dépasser les frontières
IREM PARIS