

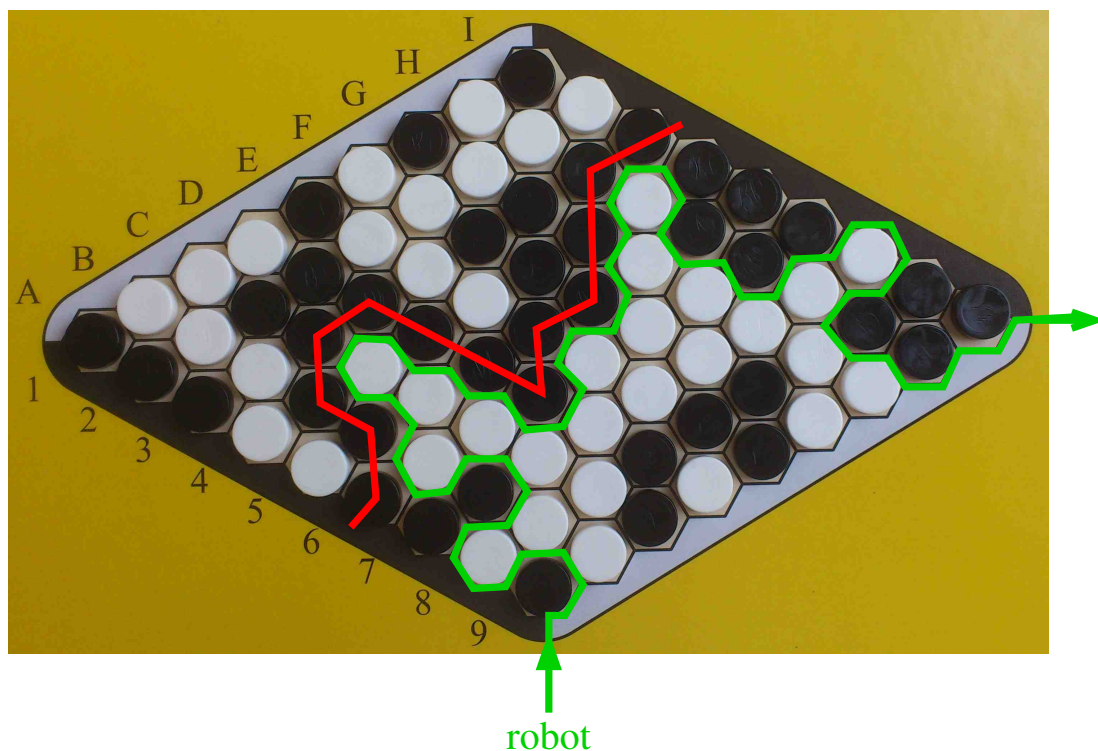


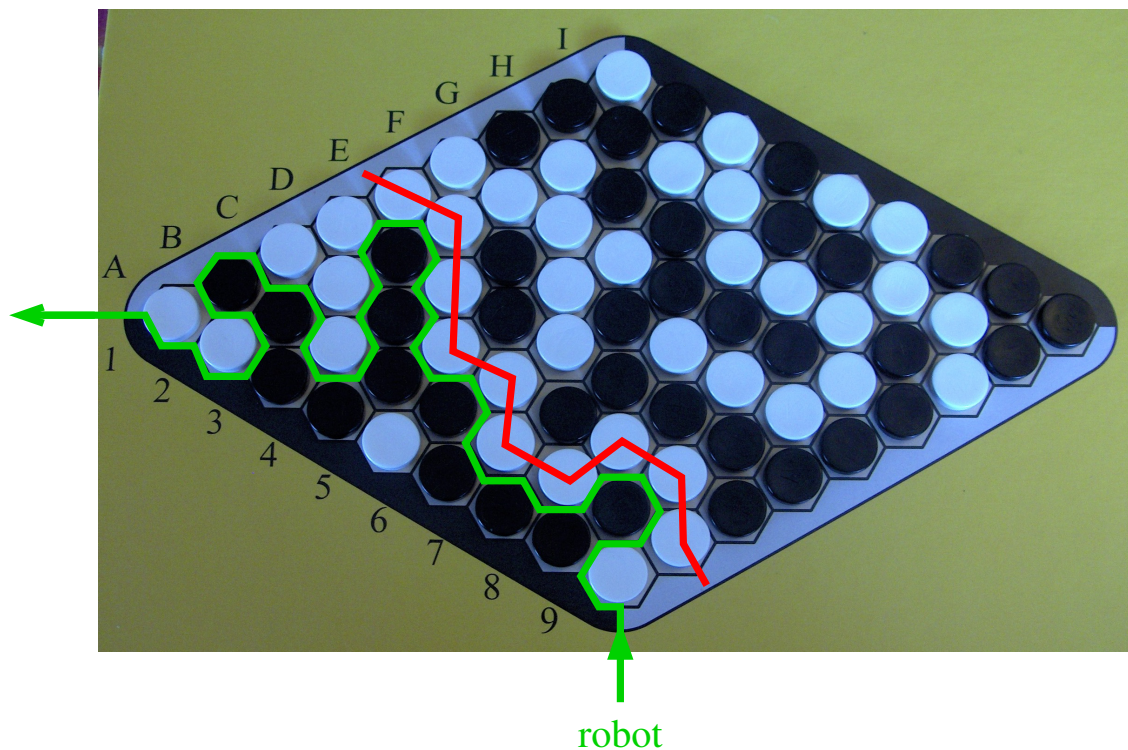
Jeu de Hex

Pour mieux connaître le jeu de Hex, vous pouvez lire l'article de Frédéric Le Roux à ce sujet sur le site d'Images des Maths, dans la catégorie "Objet du mois". Rendez-vous sur

<http://images.math.cnrs.fr/Le-jeu-de-Hex.html>

Dans cet article, vous trouverez les réponses à toutes les questions du stand - et même plus ! - sauf celles de la partie 2 concernant les robots. En effet, l'impossibilité d'aboutir à une partie nulle y est expliquée à l'aide d'un argument différent. Nous allons donc nous contenter de revenir sur le rôle des robots.



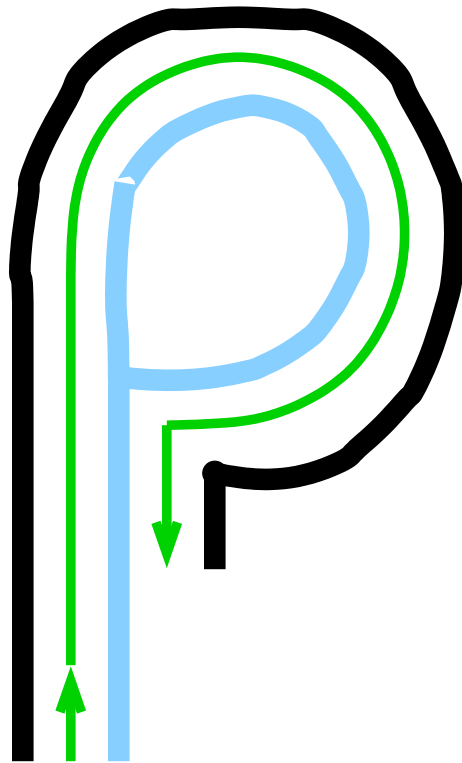


Vous voyez sur les figures ci-dessus les trajets effectués par les robots sur les deux exemples proposés. Dans l'exemple du haut, on a dessiné en rouge un chemin gagnant pour Noémie : ce chemin constitue une partie du bord gauche du trajet du robot. Dans l'exemple du bas, on a tracé en rouge un chemin gagnant pour Bertrand : ce chemin constitue une partie du bord droit du trajet du robot.

En fait le robot commence éventuellement par "rebondir" quelques fois contre les bords inférieurs du plateau, noir comme blanc. Puis il entame sa traversée du plateau. S'il touche en premier le bord supérieur noir du plateau, comme dans le premier exemple, alors il a tracé sur sa gauche un chemin noir qui est gagnant pour Noémie. S'il atteint d'abord le bord supérieur blanc du plateau, comme dans le deuxième exemple, alors il a tracé sur sa droite un chemin blanc qui est gagnant pour Bertrand.

On peut voir qui a gagné uniquement en regardant par où le robot sort du plateau. Le robot ne peut a priori sortir du plateau que par les 4 coins de celui-ci. Quand on y regarde de plus près, on s'aperçoit que pour laisser toujours le noir sur sa gauche et le blanc sur sa droite, le robot ne peut emprunter que 2 de ces 4 sorties potentielles : le coin à gauche et le coin à droite. Si le robot atteint le bord supérieur noir du plateau avant d'atteindre le bord supérieur blanc, il va continuer sa course en "rebondissant" sur ce bord éventuellement plusieurs fois, mais puisqu'il doit laisser ce bord à sa gauche il finira par sortir du plateau par le coin à droite. Inversement, si le robot a touché le bord supérieur blanc en premier, il laissera ce bord sur sa droite et sortira donc par le coin gauche du plateau. Bilan : si le robot sort par la droite, c'est Bertrand qui gagne, si le robot sort par la gauche, c'est Noémie !

Mais comment être sûr que le robot finit par sortir du plateau ? En fait le robot ne peut jamais repasser par un endroit où il est déjà passé. Regardons le dessin ci-dessous, qui représente très schématiquement le trajet du petit robot (en vert).



Le robot laisse toujours du noir sur sa gauche (pions ou bord) et du blanc (pions ou bord) sur droite. Sur le dessin, on a représenté le blanc par la couleur bleue pour qu'il soit visible. Le robot se déplace donc sur la frontière entre une région blanche et une région noire. Quand le robot essaie de revenir vers un endroit par lequel il est déjà passé, il peut soit faire un demi-tour sur sa droite, soit un demi-tour sur sa gauche. S'il tourne sur sa droite, comme sur le schéma, avant de pouvoir rejoindre un point par lequel il est déjà passé, il se retrouve confronté à une barrière de blanc. Face à cette barrière, il est obligé de tourner (il laisse toujours le blanc sur sa droite !), et il va devoir se contenter de longer son ancienne trajectoire sans pouvoir la rejoindre. De même si le robot fait demi-tour par la gauche : il se trouve alors confronté à une barrière de noir qui l'oblige encore à tourner, l'empêchant ainsi de repasser par un endroit par lequel il est déjà passé. Le robot ne peut donc pas passer deux fois au même endroit... mais il

n'y a qu'un nombre fini de frontières de cases le long desquelles il peut se déplacer. Le robot doit donc sortir du plateau en un temps fini.

On en déduit qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle au jeu de Hex. S'il y a partie nulle, alors il n'y a pas eu de gagnant à aucun moment du jeu donc les joueurs ont continué à poser leurs pions sur le plateau jusqu'à le recouvrir entièrement. Mais si le plateau est entièrement recouvert de pions, on vient de voir qu'il suffit de lancer un petit robot dessus pour déterminer à coup sûr qui des deux joueurs a gagné !

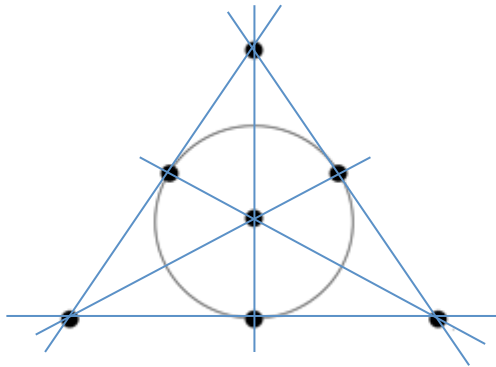
Fiche animateur « Dobble »

Avant tout, qu'est-ce que le Dobble ?

Le jeu du Dobble contient 55 cartes. Sur chacune d'elles sont dessinés 8 symboles. Lorsque l'on prend deux cartes dans le jeu, n'importe lesquelles, elles ont toujours un et un seul symbole en commun. Ensuite, il y a plusieurs petits jeux différents mais à chaque fois cela repose sur la rapidité à trouver le symbole commun entre deux cartes. Nous vous mettons les règles du jeu, si cela vous intéresse.

Fiche animateur « Dobble » Jaune

1.



2. / 3. 6 droites donc 6 cartes (vu que carte=droite).

4. symbole = point donc comme il y a trois points par droite, il y a 3 symboles par carte. De plus, il y a 7 points en tout, donc 7 symboles en tout dans le jeu.

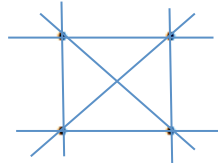
5. Pour s'aider, on peut mettre une couleur (gommette) sur chaque point puis construire les cartes au bout de chaque droite avec les trois couleurs.

On obtient ainsi le jeu avec 6 cartes de 3 symboles.

On peut alors suggérer la possibilité de rajouter des cartes. En effet, on peut construire une septième carte (qui correspond au cercle sur la figure avec les trois couleurs sur le cercle). On ne peut pas faire des cartes en plus (avec seulement 3 symboles par carte).

Fiche animateur « Dobble » Orange et Bleu

1.



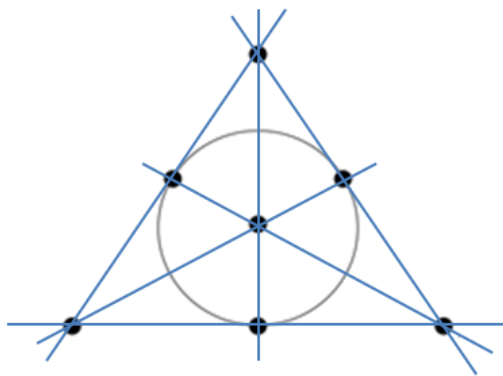
2. 6 droites / par un point passent trois droites.

3. On veut 4 cartes et 3 symboles donc on va choisir la méthode de la figure 1 où point=carte (vu qu'il y a 4 points) et droite=symbole (vu que trois droites passent par chaque point).

4. Si on prend la méthode de la figure 2 où point=symbole et droite=carte, on obtient des cartes qui n'ont pas de symboles en commun (les droites parallèles). Il faut se rappeler que dans le principe que l'on utilise : « *deux droites non parallèles se coupent toujours en un (et un seul) point* », il y a bien l'hypothèse de **droites NON parallèles**.

On va alors proposer une nouvelle configuration où il n'y a plus de droites parallèles (on va donc pouvoir utiliser la méthode 2). On utilise la géométrie projective, les droites parallèles se coupent en un même point.

5. Avec la méthode 2, qui peut sembler plus adaptée. On obtient alors 6 cartes de 3 symboles. Cependant, il est possible de trouver une septième carte (d'où la question...). On ne peut pas rajouter une septième droite (sans ajouter de points), il faut donc voir quels symboles ont été utilisés moins que les autres et alors trouver la 7^{ème} carte. Il s'agit en fait du cercle :



Remarque : en géométrie projective, un cercle est une droite.

Pour ceux qui utilisent la méthode 1, ils vont avoir sept cartes dont trois avec seulement 2 symboles (au lieu de 3). Il faut alors penser à ajouter un nouveau symbole sur les cartes et nécessairement ce symbole doit être le même pour les trois cartes, sinon elles n'auront pas de symboles communs entre elles (deux à deux).

Seulement pour les bleus :

6. A la question 3 le jeu n'est pas parfait car contient 4 cartes et utilise 6 symboles en tout. A la question 5, le jeu complété à 7 cartes est parfait.

7. Isolons les 8 cartes contenant le symbole « arbre ». Sur chacune d'elle apparaissent 7 autres symboles, qui ne peuvent pas être en commun à deux cartes puisque ces cartes partagent déjà le symbole « arbre ». On dénombre alors sur ces 8 cartes un total de $8 \times 7 + 1 = 57$ symboles. Le jeu utilise donc au moins 57 symboles mais n'a que 55 cartes. Il n'est donc pas parfait.

8. Voici le jeu de cartes proposé :

0 1 3 9	1 2 4 10	2 3 5 11	3 4 6 12	4 5 7 0	5 6 8 1	6 7 9 2
7 8 10 3	8 9 11 4	9 10 12 5	10 11 0 6	11 12 1 7	? ? ? ?	

Puisqu'on peut rajouter une carte, on va obtenir un jeu parfait de 13 cartes, utilisant 13 symboles et ayant 4 symboles par cartes. On peut montrer que dans ce cas un symbole apparaît exactement sur 4 cartes (c'est la dualité point/droite!). En effet, si un symbole apparaît sur (au moins) 5 cartes, en appliquant le raisonnement de la question précédente, on montre qu'on aurait alors au moins $5 \times 3 + 1 = 16$ symboles. Maintenant choisissons un symbole quelconque et isolons une carte contenant ce symbole. Les 12 cartes du reste du jeu peuvent se trier en 4 tas, selon les 4 symboles de cette carte. Puisqu'un symbole ne peut pas apparaître sur 5 cartes, nécessairement chacun des tas formés comporte 3 cartes. Le symbole initial apparaît donc sur 4 cartes exactement.

C'est cette méthode de tri qui permet de retrouver la carte manquante. Par exemple, dans le jeu proposé, isolons la carte « (0, 1, 3, 9) ». On trie le reste du jeu en 4 tas. Le tas « 0 », le tas « 1 », le tas « 3 », le tas « 9 ». Le tas « 0 » est plus petit que les autres. Ce symbole n'apparaît que sur 3 cartes: (0,1,3,9), (0,4,5,7), (0,6,10,11). La carte que l'on peut ajouter doit donc contenir « 0 » et aucun des autres symboles contenus sur ces 3 cartes. Une seule solution : (0,2,8,12) !

C'est avec ce type de méthode que l'on pourrait compléter le jeu Dobble du commerce. Mais avec quelques complications car dans ce cas il manque deux cartes.

Fiche animateurs Stand Baguenaudier

L'animation "baguenaudier" a été divisée en 3 étapes. La première, "chemins hamiltoniens" vise à introduire la construction du "code de Gray" faite en seconde partie. La troisième, pour terminer, est l'utilisation du code de Gray pour dénouer le casse-tête appelé Baguenaudier.

Le déroulement du stand :

- des feuilles avec carrés et cubes où sont indiquées les coordonnées sont mises à disposition du public pour la première partie.
- à la fin de la seconde partie, on dévoile le code de Gray à 5 bits pour qu'il soit prêt à être utilisé dans la troisième partie.
- au début de la troisième partie, on donne le casse-tête et on laisse les gens réfléchir. On leur explique les deux manières de sortir un anneau de la tringle (voir figure).

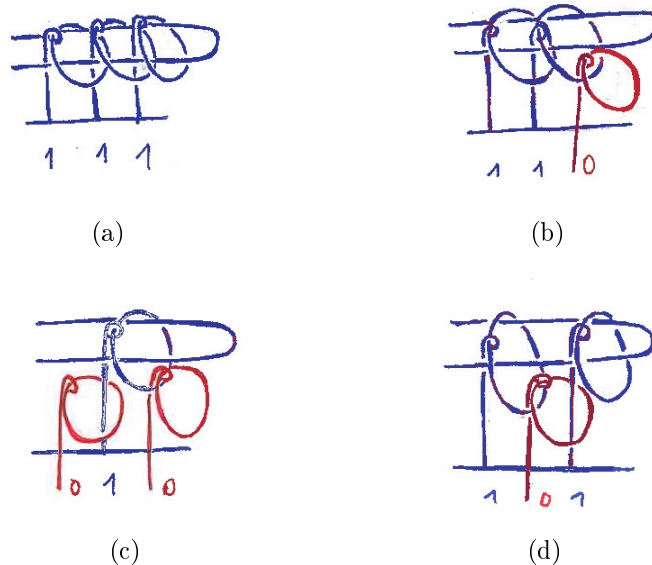


FIGURE 1 –

Vous avez en (a) la position "maximale" du baguenaudier, celle du départ du casse-tête. Le premier anneau peut toujours être changé de position, aussi on peut passer de (a) à (b) et réciproquement. Le deuxième mouvement réalisable est de bouger l'anneau derrière le premier enlacé. Ainsi on peut passer de (a) à (d) (et réciproquement), ou bien de (b) à (c) (et réciproquement). (Les 0 et 1 sur la figure constituent la traduction de chaque position en code de Gray.)

Quelques remarques supplémentaires pour les différentes fiches :

Pour la version jaune :

- Question *B* : Penser à faire remarquer qu'il y a plusieurs chemins solutions pour le cube, alors qu'il y en avait un seul pour le carré.
- La partie 4(++) est à faire uniquement si le reste s'est bien passé... On pourra insister sur le nombre de mouvements nécessaires pour 3 anneaux, à comparer avec le nombre de mouvements nécessaires pour 5 anneaux.

Pour la version orange :

- Question 2-C : Pour les plus grands, c'est l'occasion de remarquer qu'à nouveau on a un code dont deux mots consécutifs ne diffèrent que d'une lettre. Ainsi, sans même vérifier sur le cube en traçant effectivement le chemin, on sait que le code est solution, puisqu'il passe par tous les sommets une et une seule fois et que la différence d'une seule lettre permet de savoir qu'on a bien emprunter une arête pour passer d'un sommet au suivant.
- Question 2-F : il faut que la règle permettant de passer d'un mot au suivant soit clairement établie avant de passer à la suite : on change, une fois sur deux, soit la lettre la plus à droite, soit la lettre à gauche du 1 le plus à droite.

Pour la version bleue :

- Mêmes remarques que pour les oranges.
- Question 3-D : en fonction de la parité, il faut soit commencer par enlever le premier anneau tout à droite, soit commencer par enlever le deuxième (conséquence de la construction du code par image miroir). Si on se trompe, on va parcourir le mauvais côté du code depuis 11111...111, et arriver à la position 10000...000 et non 000000...000.
- Question 3-E : voir explication qui suit.
- Question 3-F : Il faudra environ 51 ans pour défaire le baguenaudier à 30 anneaux ! On peut en profiter pour faire remarquer ce qu'il en coûte de se tromper lors du premier coup...

Pour le niveau expert (bleu), les questions E et F en partie 3 nécessitent de faire un peu de calcul.

En question E, il s'agit de démontrer que le nombre minimal de mouvements à réaliser sur un baguenaudier à n anneaux pour passer de "tous les anneaux sont enlacés" à "tous les anneaux sont libérés" est égal à :

$$\begin{cases} \frac{2^{n+1} - 2}{3} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{2^{n+1} - 1}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On reprend la construction du code de Gray par image miroir et on regarde le rang occupé par le mot avec que des 1 dans le code. Notons n le nombre de lettres, et appelons x_n le rang que nous recherchons. (Attention, le nombre de coups recherché n'est pas x_n mais $x_n - 1$!)

Pour $n = 1$, on a $x_1 = 2$. Pour $n = 2$, on a $x_2 = 3$. Etc.

On considère le code de Gray à $n - 1$ lettres. Par définition de x_{n-1} , il y a x_{n-1} mots de 00...00 (rang 1) jusqu'à 11...11 (rang x_{n-1}), et il y a $2^{n-1} - x_{n-1}$ mots restant jusqu'au mot 10...00. Comptant à partir de 10...00 en remontant jusque 11...11, on trouve $2^{n-1} - x_{n-1} + 1$ mots.

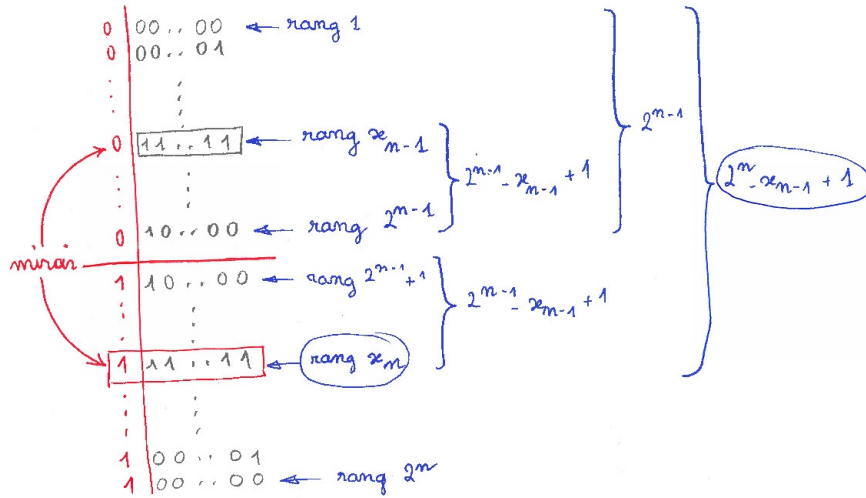


FIGURE 2 –

On construit l'image miroir afin d'obtenir le code à n lettres. Le mot avec n lettres 1 est le symétrique du mot avec $n - 1$ lettres 1 et un zéro rajouté à gauche dans la construction. Pour obtenir le rang x_n de ce mot avec n lettres 1, on compte ainsi les 2^{n-1} mots "au-dessus" du miroir (de 00...00 à 010...00), puis $2^{n-1} - x_{n-1} + 1$ mots pour atteindre celui avec n lettres 1.

On a donc : $x_n = 2^n - x_{n-1} + 1 = 2^n - (2^{n-1} - x_{n-2} + 1) = \dots$ On voit ainsi apparaître une somme alternée de puissance de 2, ainsi que des 1 qui s'éliminent deux par deux. On écrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } n \text{ pair} : x_n = 2^n - 2^{n-1} + \dots - 2^3 + x_2 = 2^n - 2^{n-1} + \dots - 2^3 + 3 = \frac{2^{n+1} + 1}{3} \\ \text{pour } n \text{ impair} : x_n = 2^n - 2^{n-1} + \dots - 2^2 + x_1 = 2^n - 2^{n-1} + \dots - 2^2 + 2 = \frac{2^{n+1} + 2}{3} \end{cases}$$

D'où le nombre de mouvements, $x_n - 1$, comme annoncé.