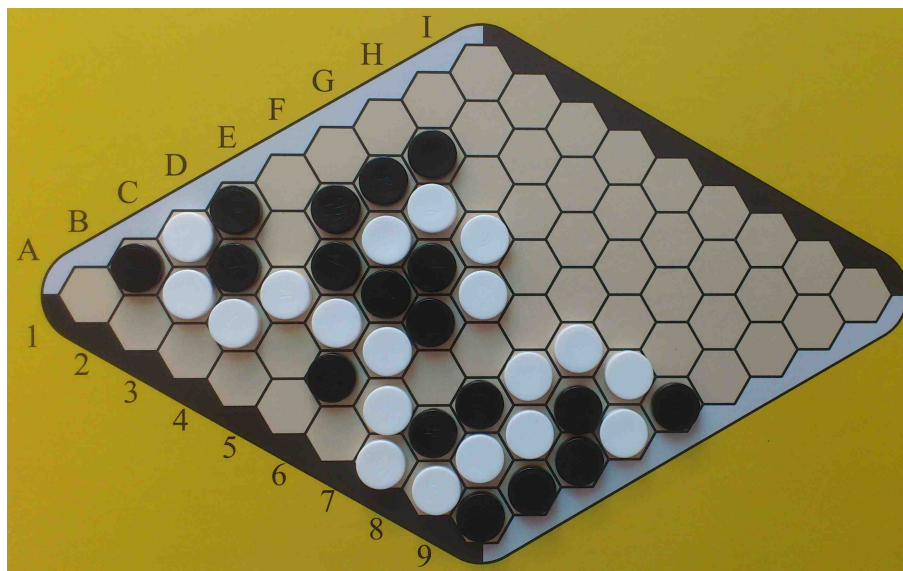




Jeu de Hex

Noémie et Bertrand ont décidé d'essayer le jeu de Hex. Ils ont devant eux un plateau en forme de losange, qui est pavé par de petits hexagones. Deux côtés opposés du plateau sont blancs, les deux autres sont noirs. Chaque joueur, à tour de rôle, va poser un pion de sa couleur sur le plateau - noir pour Noémie, blanc pour Bertrand. Le premier joueur qui réussit à relier les deux côtés du losange ayant sa couleur par un chemin de pions de sa couleur a gagné. Bertrand commence la partie.

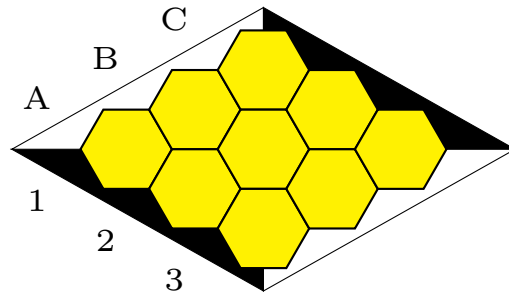
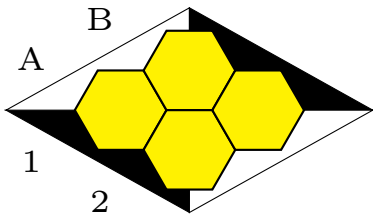
Qui va gagner ?...





1) Petits plateaux

Noémie et Bertrand choisissent d'abord de s'échauffer sur des plateaux de petite taille, 2 sur 2 et 3 sur 3.



a) À votre avis, qui va gagner ? Faites quelques essais...

b) Où Bertrand a-t-il intérêt à poser son premier pion ?

On dit qu'un joueur a une *stratégie gagnante* si, quelle que soit la façon dont son adversaire joue, il peut adapter ses coups pour être sûr de gagner.

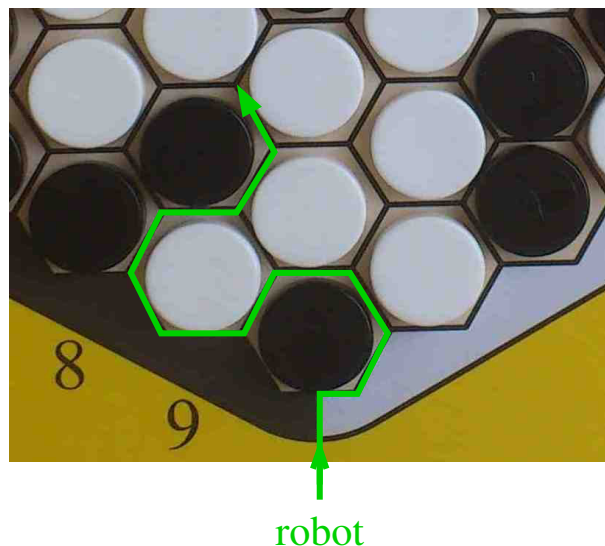
c) Est-ce que l'un des joueurs a une stratégie gagnante ?

2) Les robots s'en mêlent

Noémie et Bertrand s'attaquent à des plateaux de jeu plus grands. Mais comment savoir si l'un d'eux a gagné ?

Ils ont l'idée d'utiliser un petit robot, qu'ils placent sur le plateau quand il est entièrement recouvert par des pions. Ce robot rentre sur le plateau par un de ses coins, en avançant sur la frontière entre le bord blanc du plateau, qu'il laisse à sa droite, et le bord noir du plateau, qu'il laisse à sa gauche.

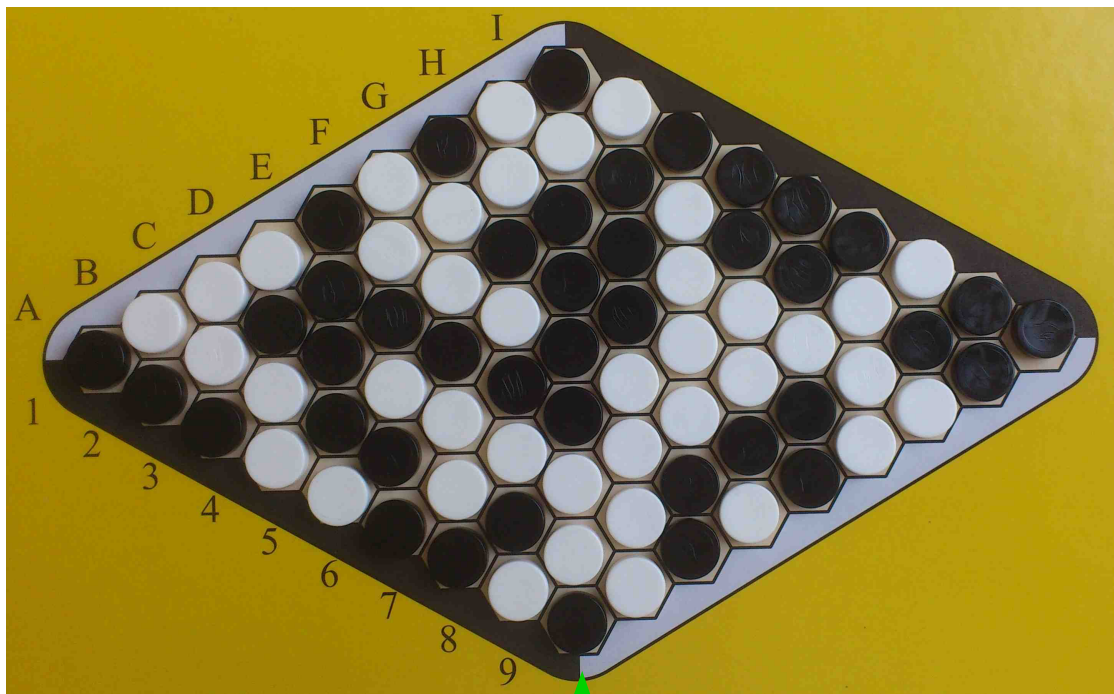
Le robot continue à avancer en restant sur les bords des cases et en laissant toujours les pions noirs (ou le bord noir) sur sa gauche et les pions blancs (ou le bord blanc) sur sa droite. Voici un exemple de ses premiers déplacements :



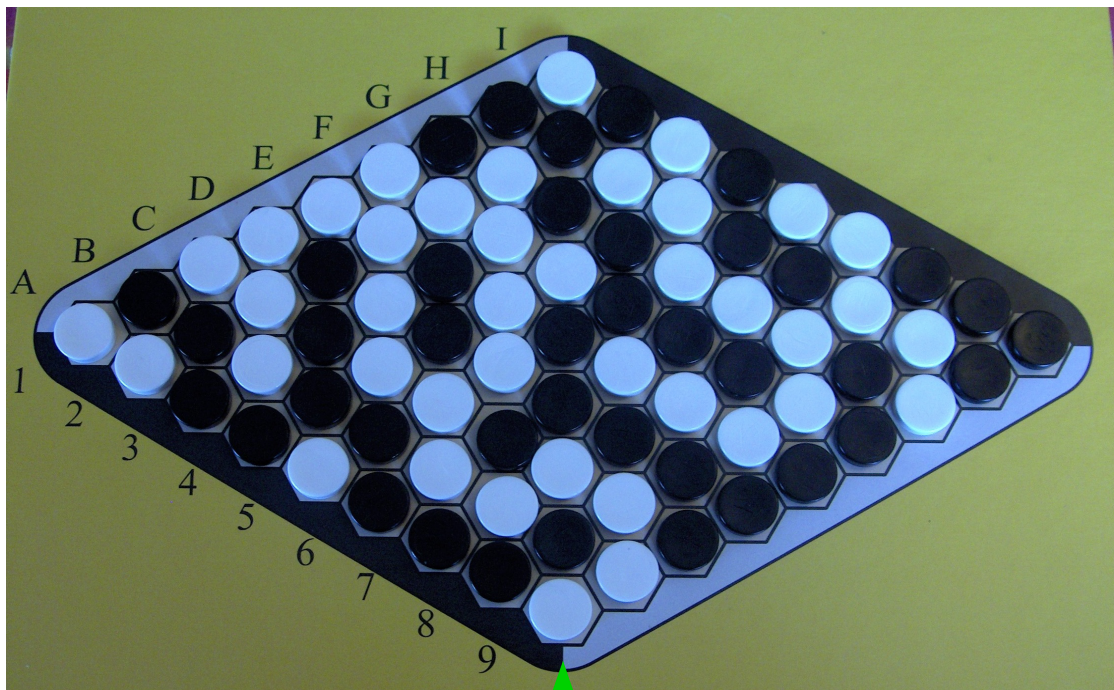


2) Les robots s'en mêlent (suite)

- a) Quel est le trajet décrit par le robot sur les deux plateaux de jeu représentés ? Qui a gagné la partie ? Où voit-on un chemin gagnant ?
- b) Pourquoi est-on sûr que le robot finit par sortir du plateau ?
- c) Pouvez-vous donner un exemple de plateau de jeu après une partie où personne n'a gagné ?



robot



robot



3) Existence d'une stratégie gagnante

Pour comprendre le déroulement de parties sur de grands plateaux, commençons par revoir en détail ce qu'il se passe sur un plateau 2 par 2. On peut représenter tous les déroulements possibles d'une partie sur un arbre (voir le dessin). On a entouré en noir toutes les configurations représentant des fins de partie où Noémie gagne, et en bleu celles où Bertrand gagne. À chaque instant de la partie, on veut savoir si c'est Noémie ou Bertrand qui est en bonne position pour gagner.

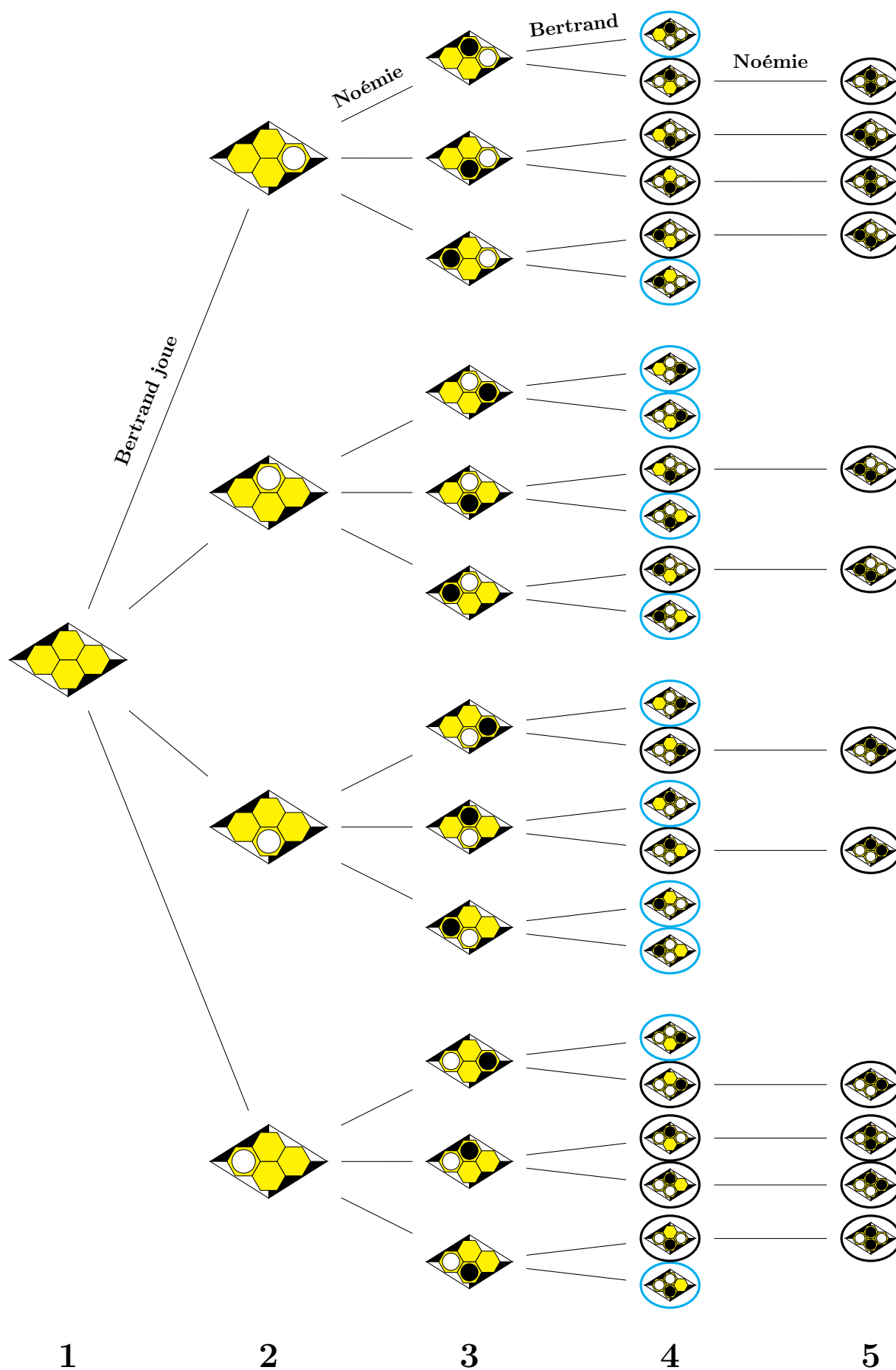
a) Sur cet arbre, pouvez-vous entourer en bleu toutes les configurations du plateau à partir desquelles Bertrand a une stratégie gagnante, et en noir celles pour lesquelles Noémie en a une ?

b) Finalement, quel joueur a une stratégie gagnante au début de cette partie ?

c) Expliquer pourquoi, quelle que soit la taille du plateau, un des deux joueurs a toujours une stratégie gagnante.

d) Peut-on appliquer cet argument aux échecs ?

Toutes les parties possibles sur un plateau 2 par 2





4) Qui est avantage ?

John Nash a démontré que c'est toujours le premier joueur qui possède une stratégie gagnante. Son argument est le suivant : si Noémie avait une stratégie gagnante, alors Bertrand pourrait la lui "voler" ; il aurait alors, lui aussi, une stratégie gagnante : contradiction !

a) Pouvez-vous expliquer comment Bertrand volerait la stratégie de Noémie ?

b) Comment Bertrand peut-il utiliser l'argument de John Nash, en pratique, pour gagner la partie ?



Le jeu

Stand DOBBLE

1



Le jeu du Dobble contient 55 cartes. Sur chacune d'elles sont dessinés 8 symboles. Lorsque l'on prend deux cartes dans le jeu, n'importe lesquelles, elles ont toujours un et un seul symbole en commun !
La conception du jeu n'a donc pas été faite au hasard.

Comment fabrique-t-on un tel jeu ?

Les maths

Deux cartes possèdent toujours un (et un seul) symbole en commun.

Cela rappelle un principe de géométrie très simple : par deux points distincts passe toujours une (et une seule) droite.

Ou un principe analogue : deux droites non parallèles se coupent toujours en un (et un seul) point.



Stand DOBBLE

2

Idée

- En utilisant ces principes de géométrie, on peut alors :
- voir les cartes comme des points, et les symboles comme des droites passant par ces points,
 - ou
 - voir les symboles comme des points, et les cartes comme des droites passant par ces points.

Il s'agit ensuite de trouver une bonne configuration géométrique !

Carte = Point
Symbole = Droite

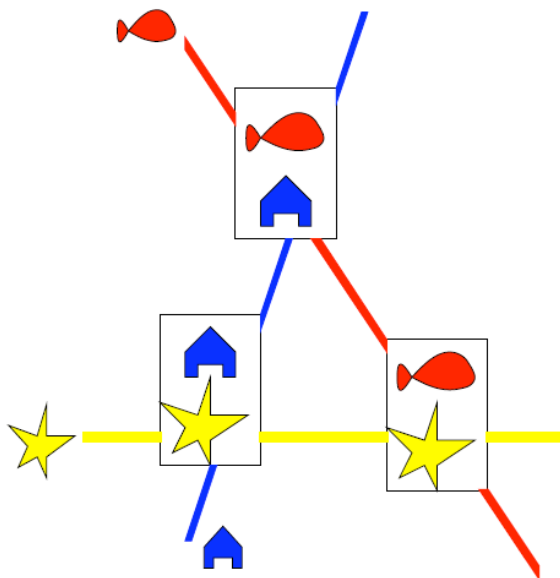


Figure 1

ou

Symbole = Point
Carte = Droite

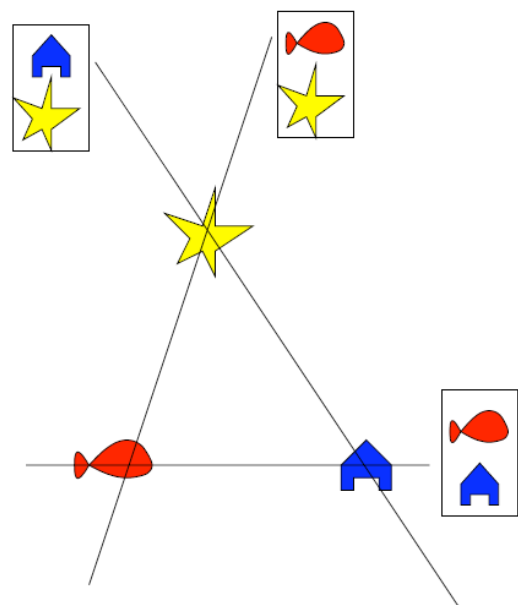


Figure 2

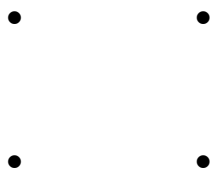


Stand DOBBLE

3

Essayons de construire un mini Dobble.

1. Tracez toutes les droites possibles passant chacune par deux points de l'ensemble de points donné ci-dessous.



2. Combien de droites avez-vous obtenues ?

Combien de droites passent par un point donné ?

3. A l'aide de la figure de la question 1, proposez un jeu de Dobble qui aurait 4 cartes et 3 symboles par carte. De combien de symboles en tout aurez-vous besoin ?

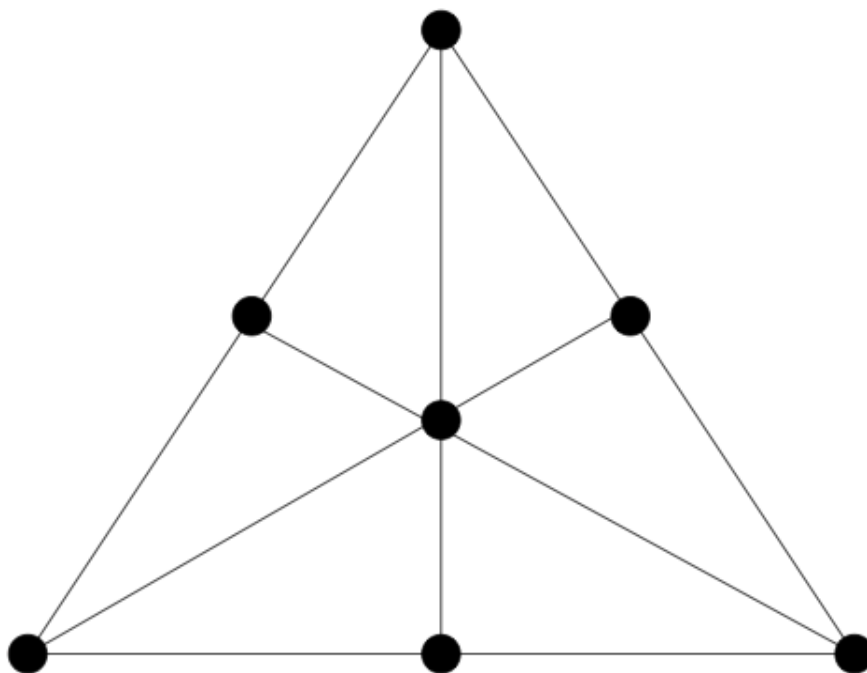
4. Si l'on utilise la méthode de la figure 2, qu'obtient-on ?



Stand DOBBLE

4

La configuration des points de départ est maintenant modifiée pour améliorer le jeu obtenu précédemment.



5. Utilisez ce nouveau dessin pour compléter votre mini Dobble.

Arrivez-vous à le compléter en un jeu de 7 cartes ?



Stand DOBBLE

5

On dira qu'un jeu est **parfait** si le nombre de cartes est égal au nombre de symboles utilisés en tout.

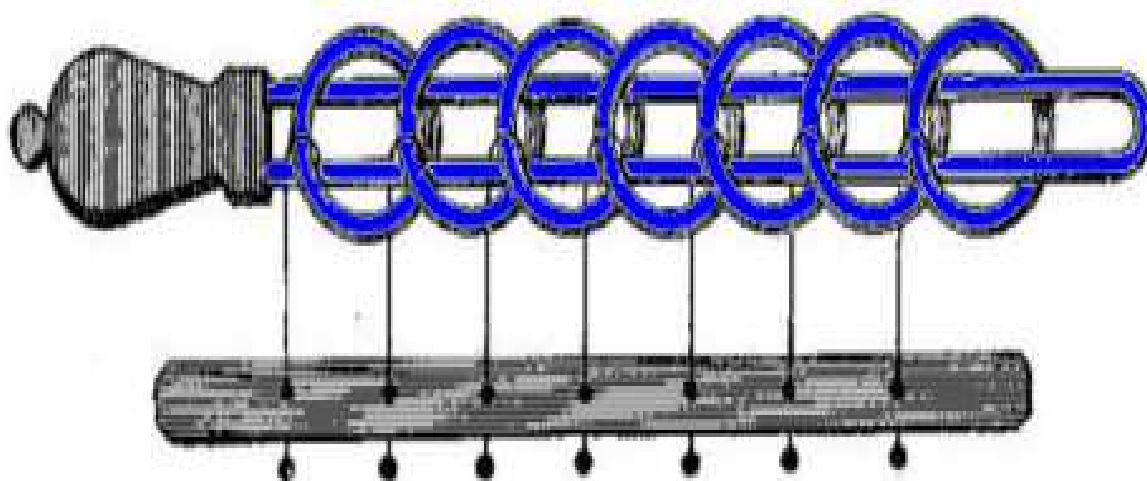
6. Les jeux construits aux questions 3 et 5 sont-ils parfaits ?

7. Dans le jeu Dobble du commerce le symbole « arbre » apparaît sur 8 cartes. Utilisez cette information pour déterminer si le jeu Dobble est parfait ou non.

8. Le jeu de cartes proposé sur la table n'est pas parfait. Il contient 12 cartes et utilise 13 symboles (les nombres de 0 à 12). On peut rajouter une carte ! Trouvez-la.

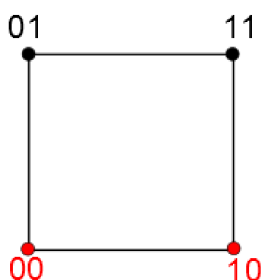
Indication : isoler une carte et trier le reste du jeu en fonction des symboles de cette carte.

Stand Baguenaudier

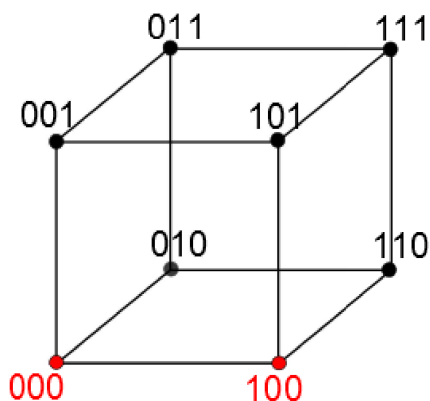


1 - Chemins hamiltoniens

A - On code les sommets du carré par leurs coordonnées. Écrivez la suite des sommets du chemin reliant les sommets 00 et 10, en passant une et une seule fois par chaque sommet.



B- Saurez-vous répondre à la même question avec un cube, en trouvant un chemin reliant les sommets 000 et 100 en passant une et une seule fois par chacun des sommets du cube ?



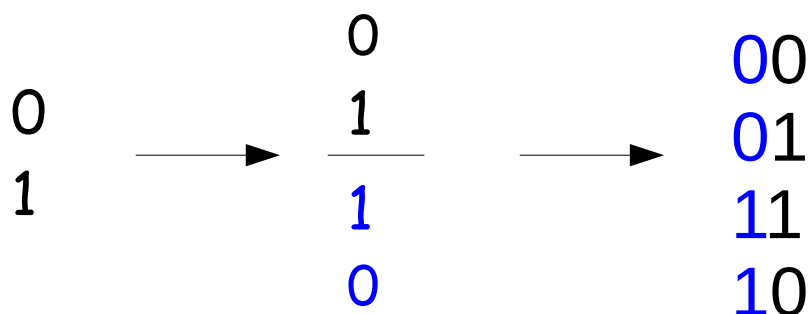
C- Au niveau du codage, comment se traduit le fait que deux sommets qui se suivent sur le chemin solution sont reliés par une arête ?

2 - Code de Gray

On construit ici le code de Gray. Chaque "mot" du code est composé uniquement de 0 et de 1, et le nombre de lettres total de tous les mots est fixé à l'avance.

Le code de Gray à une lettre est composé de deux mots : $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

Le code de Gray à deux lettres est obtenu à partir du code de Gray à une lettre par "image miroir" : à partir de l'écriture du code de Gray à une lettre, on construit son symétrique, puis on ajoute une colonne en mettant des 0 dans la première moitié et des 1 dans la deuxième.



A- Remarquez que d'un mot au suivant il n'y a qu'une seule lettre qui change. Vérifiez que le code de Gray des mots à 2 lettres donne le chemin solution du problème précédent dans le carré.

B- Avec la même méthode d'image miroir, construire le code Gray à 3 lettres.

C- Obtient-on un chemin solution pour le cube ?

2 - Code de Gray

De la même façon, on peut construire le code de Gray pour un nombre quelconque de lettres, en construisant tous les codes plus petits.

D- Combien de mots y a-t-il dans le code de Gray à n lettres ?

En fait le code Gray à n lettres donne un chemin dans un "cube de dimension n " qui passe une et une seule fois par chaque sommet !

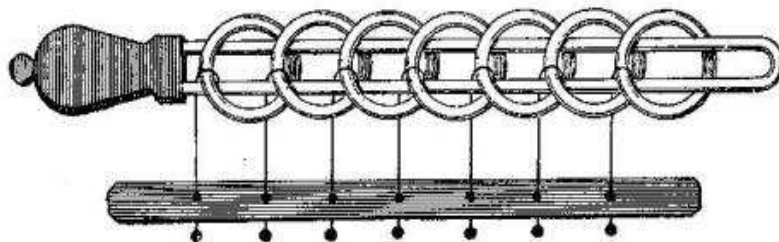
E- Si deux mots se suivent dans le code, combien de lettres différentes ont-ils ?

F- Plus précisément, pouvez-vous conjecturer la règle permettant de passer d'un mot au suivant (quelle(s) lettre(s) change(nt)) ?

3- Le baguenaudier

On passe maintenant au baguenaudier.

C'est un casse-tête ; le but est d'enlever tous les anneaux de la tringle.



Voici les mouvements autorisés à chaque étape :

- le 1er anneau (le plus à droite sur la figure) peut toujours être mis en position d'enlacement ou sorti de la tringle ;
- l'anneau derrière le 1er anneau enlacé peut être bougé pour être mis en position d'enlacement ou sorti de la tringle.

Arriverez-vous à résoudre ce casse-tête ?

A- Comment coder le problème ?

B- À l'aide de l'étape 2-F, trouvez quel est le lien avec le code de Gray.

C- Proposez une solution.

3- Le baguenaudier

Imaginons un baguenaudier avec un nombre n d'anneaux.

D- En fonction de la parité de n , quel est le premier mouvement à faire pour démêler le baguenaudier ?

E- Quel est le nombre minimum de mouvements nécessaires pour démêler le baguenaudier ?

F- Imaginons un baguenaudier à 30 anneaux. En comptant qu'on peut faire 64 mouvements par minute et qu'on est prêt à y passer 10h chaque jour, combien de temps environ faudra-t-il pour défaire ce baguenaudier ?