

Stand Frisettes

Frises murales:

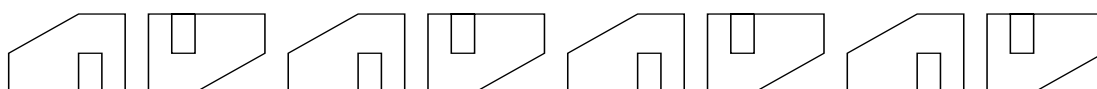
Les frises décoratives sont des bandes harmonieuses utilisées pour border des murs, des balcons, des portes, des tapis...

Avant d'être répété, le motif de la frise peut subir une transformation, par exemple

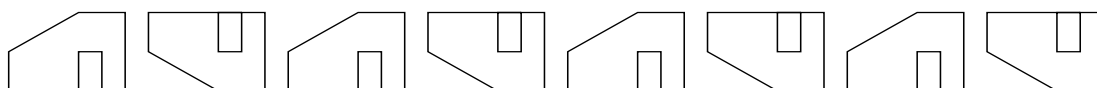
Répétition simple



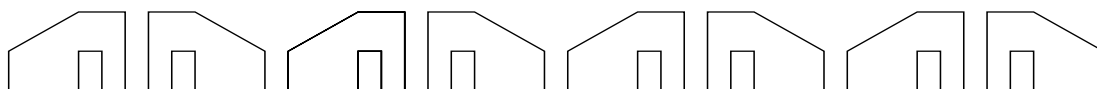
Rotation 180°



Retournement



Miroir

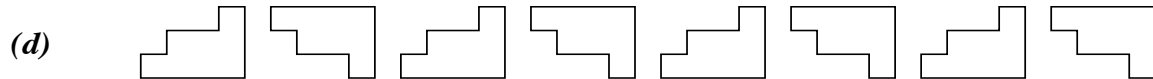
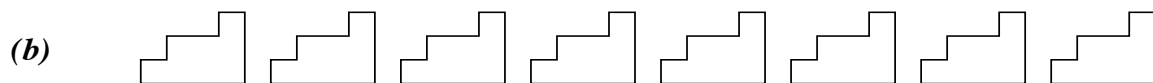
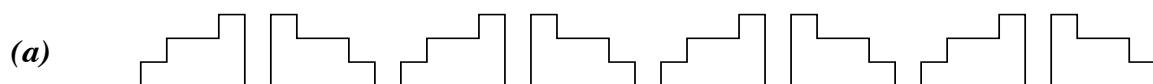


Crée des frises! Prolonge les bandes qui sont proposées en utilisant l'opération indiquée.

Stand Frisettes

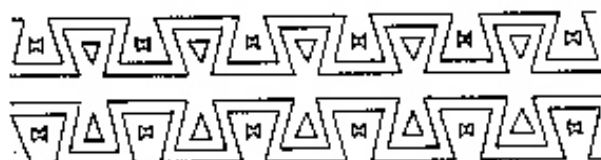
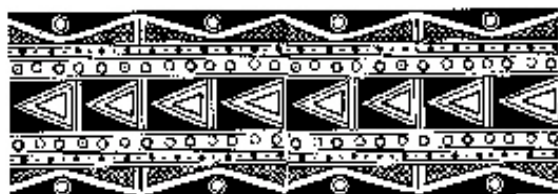
Association:

Associe chaque frise de la première famille, frises (a)-(d), à une frise de la deuxième famille, frises (1)-(4) suivant les opérations utilisées.



Stand Frisettes

Exemples de frises décorant des tapis:



Stand Frisettes

Frises Arithmétiques:

Les frises sont des lignes de nombres disposés en quinconce, dont la première et la dernière ne comportent que des 1, et telles que quatre valeurs voisines

$$\begin{array}{c} B \\ A \quad D \\ C \end{array} \quad \text{vérifient } A \times D = B \times C + 1.$$

Exemples:

(F1) ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

...	2	2	2	1	4	1	2	2	...
...	1	3	3	1	3	3	1	3	...
...	1	4	1	2	2	2	1	4	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	...

(F2) ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

...	2	3	1	2	4	1	2	2	3	1	2	...
...	3	5	2	1	7	3	1	3	5	2	1	...
...	7	3	1	3	5	2	1	7	?	1	3	...
...	2	4	1	2	2	3	1	2	4	1	2	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Stand Frisettes

1. Que vaut ? dans l'exemple (F2) ?

2. Compléter les frises suivantes:

(F3) ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 ... • • 1 • • • • • ...
 ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

(F4) ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 ... • • 1 • • • • • ...
 ... • • 1 • • • • • ...
 ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

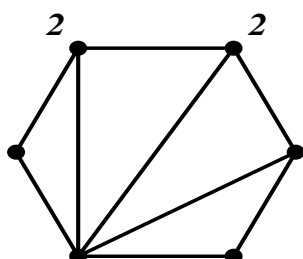
3. Que remarquez-vous dans toutes ces frises?

4*. Pouvez-vous compléter la frise suivante?

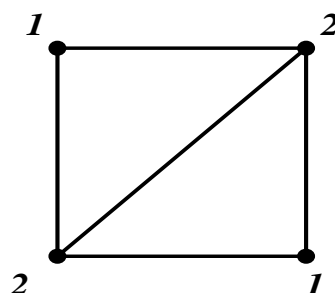
(F5) ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 ... • • 1 • • • • • ...
 ... • • • • • • • • • ...
 ... • 1 • 1 • • • • • ...
 ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

Stand Frisettes

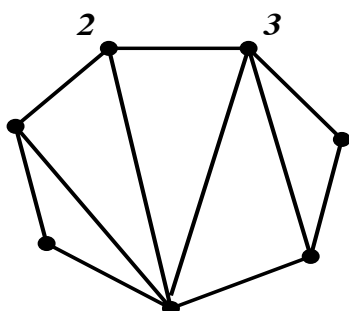
5. Compléter les dessins ci-dessous, en inscrivant à chaque sommet le nombre de triangles contenant ce sommet. Ecrivez ensuite la suite des nombres obtenus.



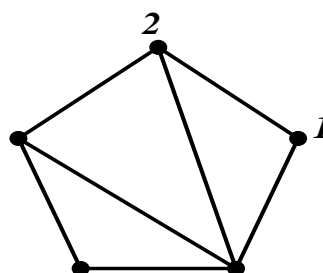
(S1): 2, 2, ...



(S3): 1, 2, 1, 2



(S2): 2, 3, ...



(S4): 2, 1, ...

6. Retrouvez-vous ces suites de nombres dans les frises (F1)-(F4)?

7*. Construire un découpage de polygone associé à (S5).



Stand Frisettes

Frises Arithmétiques:

Les frises sont des lignes de nombres disposés en quinconce, dont la première et la dernière ne comportent que des 1, et telles que quatre valeurs voisines

$$\begin{array}{c} B \\ A \quad D \quad \text{vérifient } Ax D = Bx C + 1. \\ C \end{array}$$

Exemples:

(F1) ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 ... 2 2 2 1 4 1 2 2 ...
 ... 1 3 3 1 3 3 1 3 3 ...
 ... 1 4 1 2 2 2 1 4 ...
 ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

(F2) ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
 ... 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 ...
 ... 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 ...
 ... 7 3 1 3 5 2 1 7 ? 1 3 ...
 ... 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 ...
 ... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

Stand Frisettes

1. Que vaut ? dans l'exemple (F2) ?

2. Compléter les frises suivantes:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 (F3) & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & \dots & \cdot & & \cdot & & 1 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \dots \\
 & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 (F4) & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & \dots & \cdot & & \cdot & & 1 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \dots \\
 & \dots & \cdot & & \cdot & & 1 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \dots \\
 & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
 \end{array}$$

3. Que remarquez-vous dans toutes ces frises?

4. Compléter la frise suivante en simplifiant les fractions obtenues au maximum

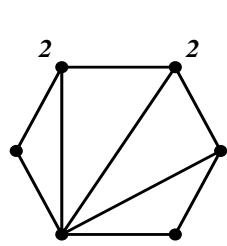
$$\begin{array}{cccccccccc}
 (F4) & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & \dots & \cdot & & \cdot & & x & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \dots \\
 & \dots & \cdot & & \cdot & & y & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \dots \\
 & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
 \end{array}$$

Que peut-on en déduire?

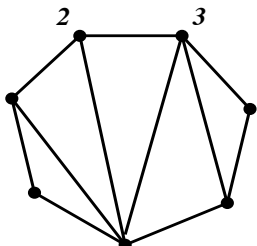
Stand Frisettes

5. Pouvez-vous trouver une frise à trois lignes, comportant uniquement des nombres entiers positifs autre que (F3) ?

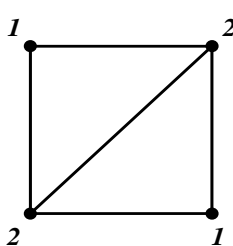
6. Compléter les dessins ci-dessous, en inscrivant à chaque sommet le nombre de triangles contenant ce sommet. Ecrivez ensuite la suite des nombres obtenus.



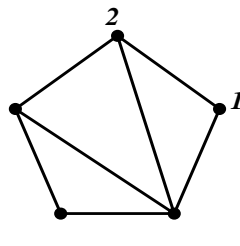
(S1): 2, 2, ...



(S2): 2, 3, ...



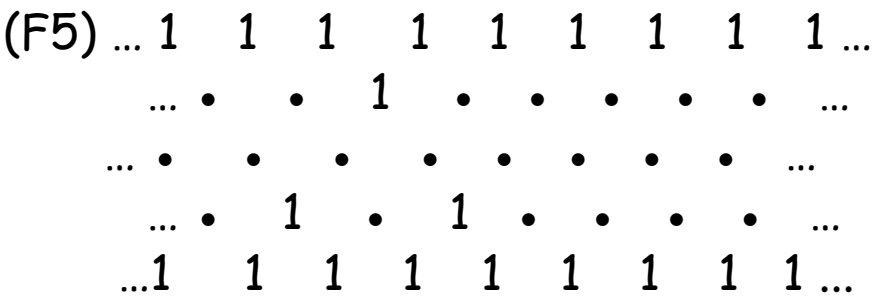
(S3): 1, 2, 1, 2



(S4): 2, 1, ...

7. Retrouvez-vous ces suites de nombres dans les frises (F1)-(F4)?

8. Pouvez-vous compléter la frise suivante et lui associer un découpage de polygone?



Codes Secrets

La cryptographie est la science des messages secrets. En voici quelques exemples.

1) Le code César

Jules César utilisait le système le plus simple, celui des alphabets décalés d'un ou plusieurs crans (où l'on remplace, par exemple A par B, B par C, etc.). En vous servant des “disques César” fournis saurez-vous décoder le message suivant ?

ZPYTM RS CQ SL CQNGML

2) On peut employer des méthodes plus sophistiquées. Par exemple permuter les lettres selon une règle simple. Un espion envoie le message

À L'AIDE

sous la forme

Z M'ZR WV

Saurez-vous trouver la règle qu'il a utilisée ?

A vous de lui répondre

J'ARRIVE



Codes Secrets

La cryptographie est la science des messages secrets. En voici quelques exemples.

1) Le code César

Jules César utilisait le système le plus simple, celui des alphabets décalés d'un ou plusieurs crans (où l'on remplace, par exemple A par B, B par C, etc.). En vous servant des “disques César” fournis saurez-vous décoder le message suivant ?

ZPYTM RS CQ SL CQNGML

2) On peut employer des méthodes plus sophistiquées. Par exemple permuter les lettres selon une règle simple. Un espion envoie le message

À L'AIDE

sous la forme

Z M'ZRWW

Saurez-vous trouver la règle qu'il a utilisée ?

A vous de lui répondre

J'ARRIVE

Codes Secrets

3) Ces méthodes ont un défaut : il suffit d'identifier les lettres qui apparaissent le plus. Par cette méthode, pouvez-vous traduire le message suivant ?

**SALCF CFVH LCNE ANVHHP L GNZIPUANA KN RNHHLBN
CFVH NYOANE GLYH KN ZKVS OANH UNARN GNH ZLHHNVAH
GN ZFGNH HNZANOH UALYZLPH KNH NHMPFYH Y'FYO MKVH
TV'L SPNY HN ONYPA UNKPZPOLOPFYH**

en sachant qu'en français, les lettres les plus fréquentes sont, dans l'ordre, E, puis S et A, puis R, I, N et T, puis U, puis O et L, etc et que dans le message ci-dessus les lettres qui apparaissent le plus souvent sont A (11 fois), F (7 fois), H (22 fois), L (10 fois), N (25 fois), O (7 fois), P (9 fois), V (7 fois) et Y (8 fois).

Indication : commencer par identifier les mots

ANVHHP

KNH

NHMPFYH

SPNY

ONYPA.

C'est après que l'un de ses messages a été décodé de cette manière que Marie Stuart fut condamnée à mort.

Codes Secrets

La cryptographie est la science des messages secrets. En voici quelques exemples.

1) Le code César

Jules César utilisait le système le plus simple, celui des alphabets décalés d'un ou plusieurs crans (où l'on remplace, par exemple A par B, B par C, etc.). En vous servant des “disques César” fournis saurez-vous décoder le message suivant ?

ZPYTM RS CQ SL CQNGML

2) On peut employer des méthodes plus sophistiquées. Par exemple permuter les lettres selon une règle simple. Un espion envoie le message

À L'AIDE

sous la forme

Z M'ZRWW

Saurez-vous trouver la règle qu'il a utilisée ?

A vous de lui répondre

J'ARRIVE

Codes Secrets

3) Ces méthodes ont un défaut : il suffit d'identifier les lettres qui apparaissent le plus. Par cette méthode, pouvez-vous traduire le message suivant ?

**SALCF CFVH LCNE ANVHHP L GNZIPUANA KN RNHHLBN
CFVH NYOANE GLYH KN ZKVS OANH UNARN GNH ZLHHNVAH
GN ZFGNH HNZANOH UALYZLPH KNH NHMPFYH Y'FYO MKVH
TV'L SPNY HN ONYPA UNKPZPOLOPFYH**

en sachant qu'en français, les lettres les plus fréquentes sont, dans l'ordre, E, puis S et A, puis R, I, N et T, puis U, puis O et L, etc et que dans le message ci-dessus les lettres qui apparaissent le plus souvent sont A (11 fois), F (7 fois), H (22 fois), L (10 fois), N (25 fois), O (7 fois), P (9 fois), V (7 fois) et Y (8 fois).

Indication : commencer par identifier les mots

ANVHHP

KNH

NHMPFYH

SPNY

ONYPA.

C'est après que l'un de ses messages a été décodé de cette manière que Marie Stuart fut condamnée à mort.



Codes Secrets

4) Pouvez-vous deviner la méthode de codage utilisée pour le message précédent ?

5) Le code Gödel

De nos jours les codes secrets sont partout sur internet et les méthodes plus sophistiquées utilisent des propriétés fines des nombres premiers. Voici un exemple, peu utile en pratique mais amusant, de code utilisant les nombres premiers ; il a été inventé par le grand logicien Kurt Gödel.

À chaque lettre on associe son rang dans l'ordre alphabétique : ainsi, on associe 1 à A, 2 à B, 3 à C, etc.

La n-ième lettre du texte à coder est ensuite remplacée par le n-ième nombre premier élevé à la puissance qui correspond à la lettre.

Par exemple, si la première lettre du message est B, ce B sera codé $2^2 = 4$.

Si la deuxième lettre est A, cette lettre sera codée par $3^1 = 3$, etc.

Le message lui-même sera codé par le produit des codages de ses lettres. Ainsi le mot BA est codé par le nombre 12 ($= 2^2 \cdot 3^1$).

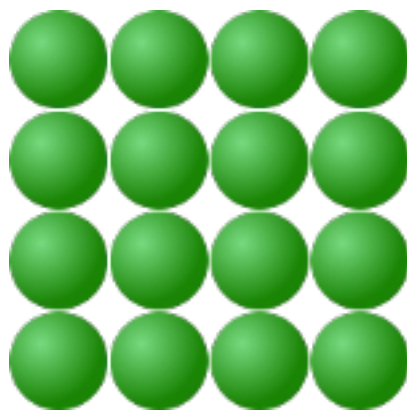
À vous de décoder le message suivant (constitué d'un seul nombre) :

5 804 752 896

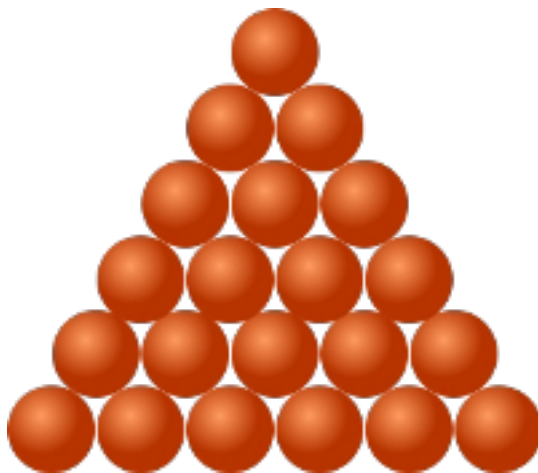
Stand

Nombres figurés

Un nombre figuré est un nombre qui peut être représenté par un ensemble de points disposés de façon plus ou moins régulière et formant une figure géométrique.



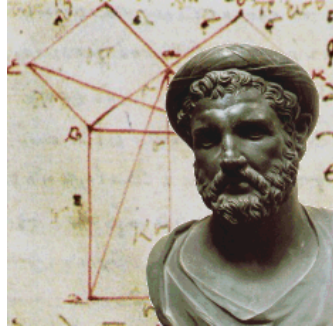
Par exemple, 16 est un nombre carré.



Et 21 est un nombre triangulaire.

Stand

Nombres triangulaires



A. 1, 2, 3, 5, 6, sont-ils des nombres Triangulaires?

B. On peut classer les nombres triangulaires par ordre croissant.

Sauriez-vous déterminer le 4ème nombre triangulaire appelé par les pythagoriciens le Tetraktys?

C. Et le 35 ème?

Stand

Les nombres triangulaires



A. 1, 2, 3, 5, 6, sont-ils des nombres Triangulaires?

B. On peut classer les nombres triangulaires par ordre croissant.

Sauriez-vous déterminer le 4ème nombre triangulaire appelé par les pythagoriciens le Tetraktys?

C. Et le 35 ème?

D. Un nombre triangulaire supérieur à 3 est-il somme de 4 nombres triangulaires?

Stand Les nombres figurés

A. 1, 2, 3, 5, 6, sont-ils des nombres triangulaires?

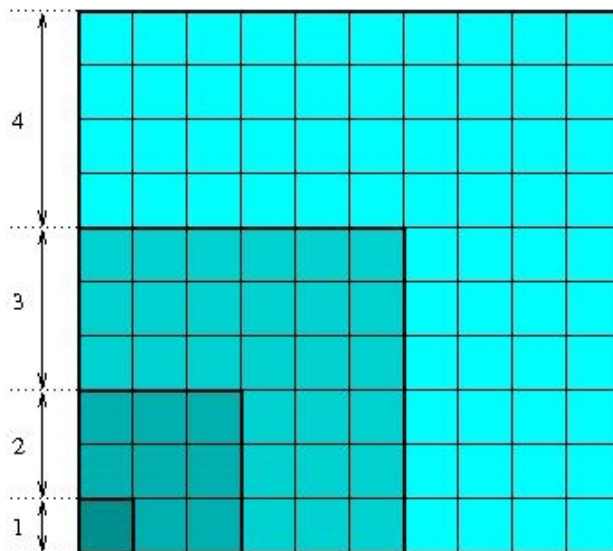
B. On peut classer les nombres triangulaires par ordre croissant. Sauriez-vous déterminer le 35^{ème}?

C. Un nombre triangulaire supérieur à 3 est-il somme de 4 nombres triangulaires?

D. Pourriez-vous montrer en utilisant la figure ci-dessous que

$$(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3?$$

Les nombres triangulaires peuvent-ils aider?



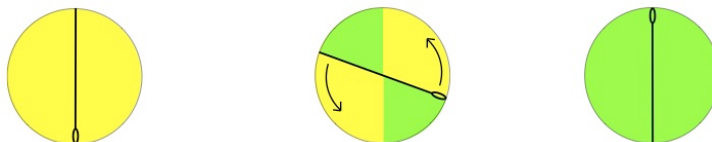


L'aiguille de Kakeya

Ce stand vous propose d'explorer la question posée par Kakeya en 1917 :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

Bien sûr, on peut retourner l'aiguille à l'intérieur d'un disque :



Peut-on faire mieux ?...



L'aiguille de Kakeya

1) Le triangle de Reuleaux

On retourne maintenant l'aiguille de la façon suivante. On fixe d'abord l'une des extrémités, et on tourne l'aiguille de 60° . On fixe alors l'autre extrémité, et on tourne à nouveau de 60° . On change à nouveau d'extrémité et on fait une dernière rotation. *Dessiner la figure balayée par l'aiguille.*

2) Le triangle

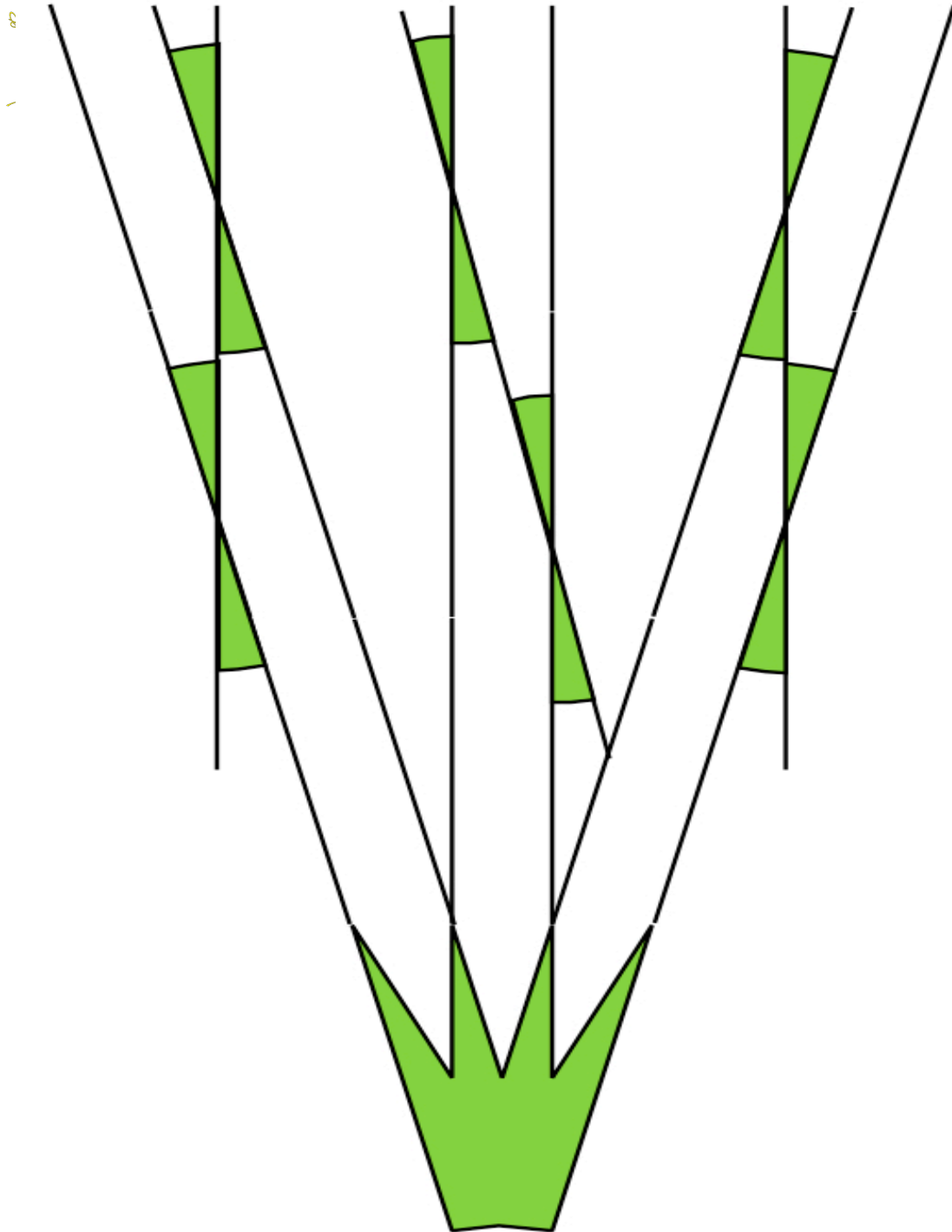
Dessiner une aiguille, et un triangle équilatéral à l'intérieur duquel on peut la retourner. *Décrire le plus petit triangle équilatéral possible.*

3) D'autres formes

On vous propose maintenant d'expérimenter avec les formes en cartons disponibles sur le stand. *Sélectionner celles dans lesquelles on peut retourner l'aiguille. Essayer de les classer, au jugé, de la plus grande à la plus petite aire.*

4) Vers la solution...

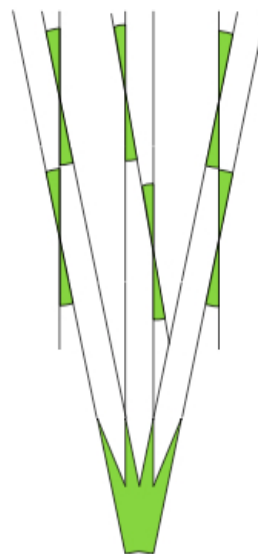
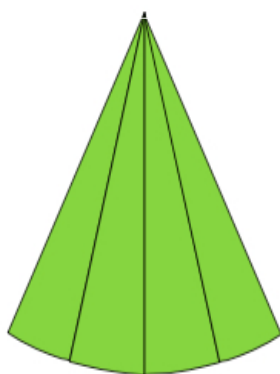
La page suivante montre un dessin imaginé par le mathématicien Besicovich ; on peut faire tourner l'aiguille de 45° tout en restant dans l'ensemble vert. *Voyez-vous comment ?*



L'aiguille de Kakeya

L'idée de Besicovich consiste à découper le secteur angulaire en morceaux (quatre morceaux sur notre figure), à translater les morceaux pour qu'ils se chevauchent le plus possible, puis à ajouter un chouïa de surface pour rendre possible les transitions entre les différents morceaux. Il a calculé qu'en utilisant suffisamment de morceaux, on peut rendre l'aire finale aussi petite que l'on veut.

(Il faut vraiment **beaucoup de morceaux** ; par exemple, en utilisant **24 117 248** morceaux on peut diviser la surface initiale d'un facteur 5 ; pour avoir une aire 10 fois plus petite il suffit d'utiliser **12 393 906 174 523 604 992** morceaux...)



La réponse finale au problème de Kakeya est donnée par le **théorème de Besicovich (1928)** :

Si on suppose que l'aiguille est infiniment mince, on peut la retourner en balayant une surface aussi petite que l'on veut.

L'histoire ne s'arrête cependant pas en 1928 : des mathématiciens explorent actuellement un problème analogue en dimension supérieure, surtout depuis qu'en 1999 Jean Bourgain a mis en évidence un lien avec la répartition des nombres premiers.

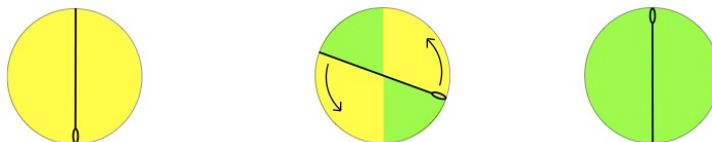


L'aiguille de Kakeya

Ce stand vous propose d'explorer la question posée par Kakeya en 1917 :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

Bien sûr, on peut retourner l'aiguille à l'intérieur d'un disque :



Peut-on faire mieux ?...



L'aiguille de Kakeya

1) Le triangle de Reuleaux

On retourne maintenant l'aiguille de la façon suivante. On fixe d'abord l'une des extrémités, et on tourne l'aiguille de 60° . On fixe alors l'autre extrémité, et on tourne à nouveau de 60° . On change à nouveau d'extrémité et on fait une dernière rotation. *Dessiner la figure balayée par l'aiguille.*

2) Le triangle

Dessiner une aiguille, et un triangle équilatéral à l'intérieur duquel on peut la retourner. *Décrire le plus petit triangle équilatéral possible.*

3) D'autres formes

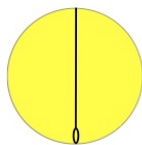
On vous propose maintenant d'expérimenter avec les formes en cartons disponibles sur le stand. *Sélectionner celles dans lesquelles on peut retourner l'aiguille. Essayer de les classer, au jugé, de la plus grande à la plus petite aire.*



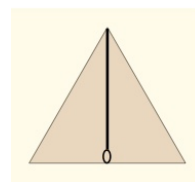
L'aiguille de Kakeya

Pour tester votre classement, nous vous proposons de calculer l'aire des surfaces les plus simples. On suppose que l'aiguille mesure 1 décimètre (dm), et on exprime les aires en dm^2 . Vous pouvez vous aider de la fiche sur le calcul des surfaces, et d'une calculatrice.

4) Calculer l'aire du disque dans lequel on peut retourner l'aiguille.



5) Calculer l'aire du triangle équilatéral.



6) Pour calculer l'aire du triangle de Reuleaux, on peut d'abord exprimer cette aire en utilisant uniquement trois secteurs angulaires et un triangle, voyez-vous comment ?...

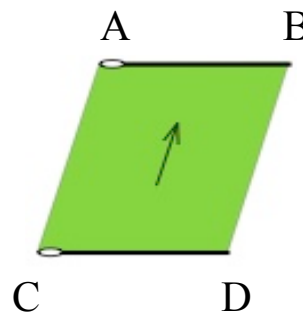




L'aiguille de Kakeya

7) Intermède (question optionnelle)

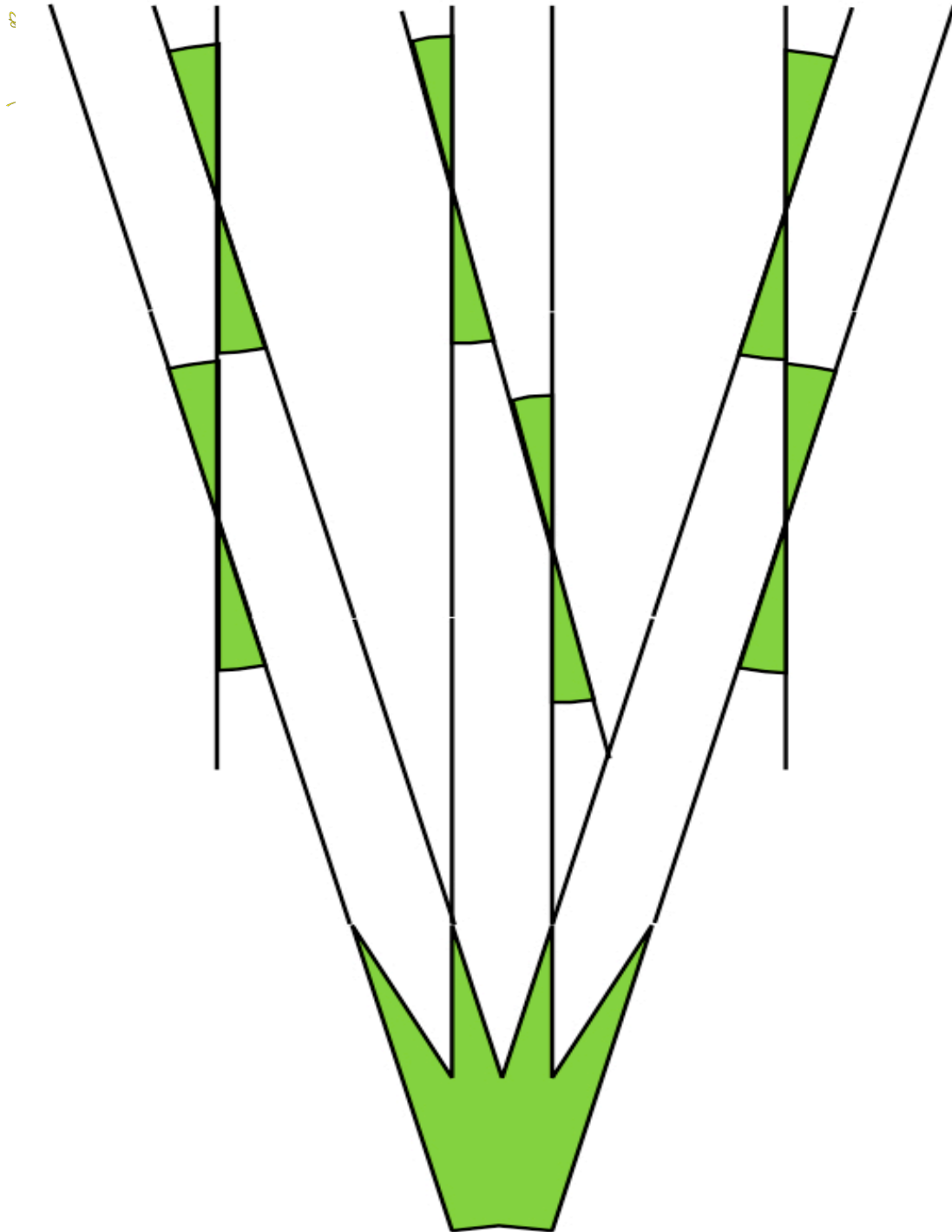
On voudrait maintenant amener l'aiguille de la position AB à une position parallèle CD. Le plus simple est de translater l'aiguille de AB à CD en balayant un parallélogramme, mais à nouveau, on voudrait trouver comment effectuer le déplacement en balayant la plus petite aire possible.



Comment faire mieux que le parallélogramme ABDC ? Quelle est la plus petite surface possible ?

8) Vers la solution

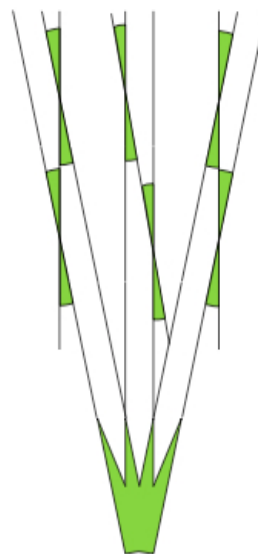
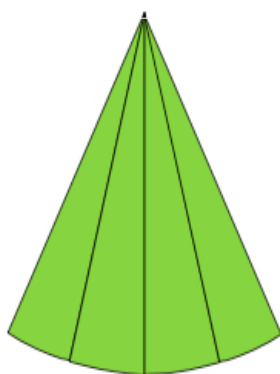
La page suivante montre un dessin imaginé par le mathématicien Besicovich ; on peut faire tourner l'aiguille de 45° tout en restant dans l'ensemble vert. Voyez-vous comment ?



L'aiguille de Kakeya

L'idée de Besicovich consiste à découper le secteur angulaire en morceaux (quatre morceaux sur notre figure), à translater les morceaux pour qu'ils se chevauchent le plus possible, puis à ajouter un chouïa de surface pour rendre possible les transitions entre les différents morceaux. Il a calculé qu'en utilisant suffisamment de morceaux, on peut rendre l'aire finale aussi petite que l'on veut.

(Il faut vraiment **beaucoup de morceaux** ; par exemple, en utilisant **24 117 248** morceaux on peut diviser la surface initiale d'un facteur 5 ; pour avoir une aire 10 fois plus petite il suffit d'utiliser **12 393 906 174 523 604 992** morceaux...)



La réponse finale au problème de Kakeya est donnée par le **théorème de Besicovich (1928)** :

Si on suppose que l'aiguille est infiniment mince, on peut la retourner en balayant une surface aussi petite que l'on veut.

L'histoire ne s'arrête cependant pas en 1928 : des mathématiciens explorent actuellement un problème analogue en dimension supérieure, surtout depuis qu'en 1999 Jean Bourgain a mis en évidence un lien avec la répartition des nombres premiers.

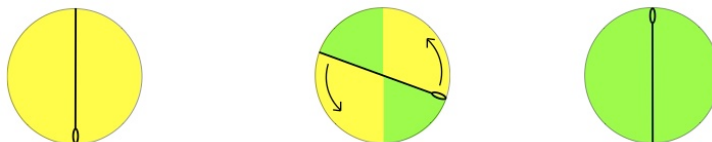


L'aiguille de Kakeya

Ce stand vous propose d'explorer la question posée par Kakeya en 1917 :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

Bien sûr, on peut retourner l'aiguille à l'intérieur d'un disque :



Peut-on faire mieux ?...



L'aiguille de Kakeya

1) Le triangle de Reuleaux

On retourne maintenant l'aiguille de la façon suivante. On fixe d'abord l'une des extrémités, et on tourne l'aiguille de 60° . On fixe alors l'autre extrémité, et on tourne à nouveau de 60° . On change à nouveau d'extrémité et on fait une dernière rotation. *Dessiner la figure balayée par l'aiguille.*

2) Le triangle

Dessiner une aiguille, et un triangle équilatéral à l'intérieur duquel on peut la retourner. *Décrire le plus petit triangle équilatéral possible.*

3) D'autres formes

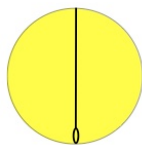
On vous propose maintenant d'expérimenter avec les formes en cartons disponibles sur le stand. *Sélectionner celles dans lesquelles on peut retourner l'aiguille. Essayer de les classer, au jugé, de la plus grande à la plus petite aire.*



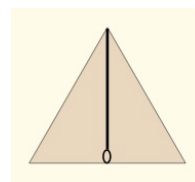
L'aiguille de Kakeya

Pour tester votre classement, nous vous proposons de calculer l'aire des surfaces les plus simples. On suppose que l'aiguille mesure 1 décimètre (dm), et on exprime les aires en dm^2 . Vous pouvez vous aider de la fiche sur le calcul des surfaces, et d'une calculatrice.

4) Calculer l'aire du disque dans lequel on peut retourner l'aiguille.



5) Calculer l'aire du triangle équilatéral.



6) Calculer l'aire du triangle de Reuleaux.

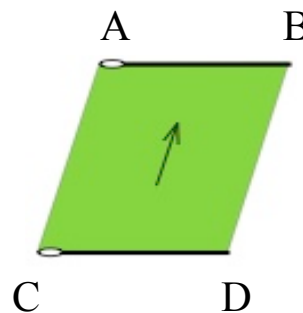




L'aiguille de Kakeya

7) Intermède

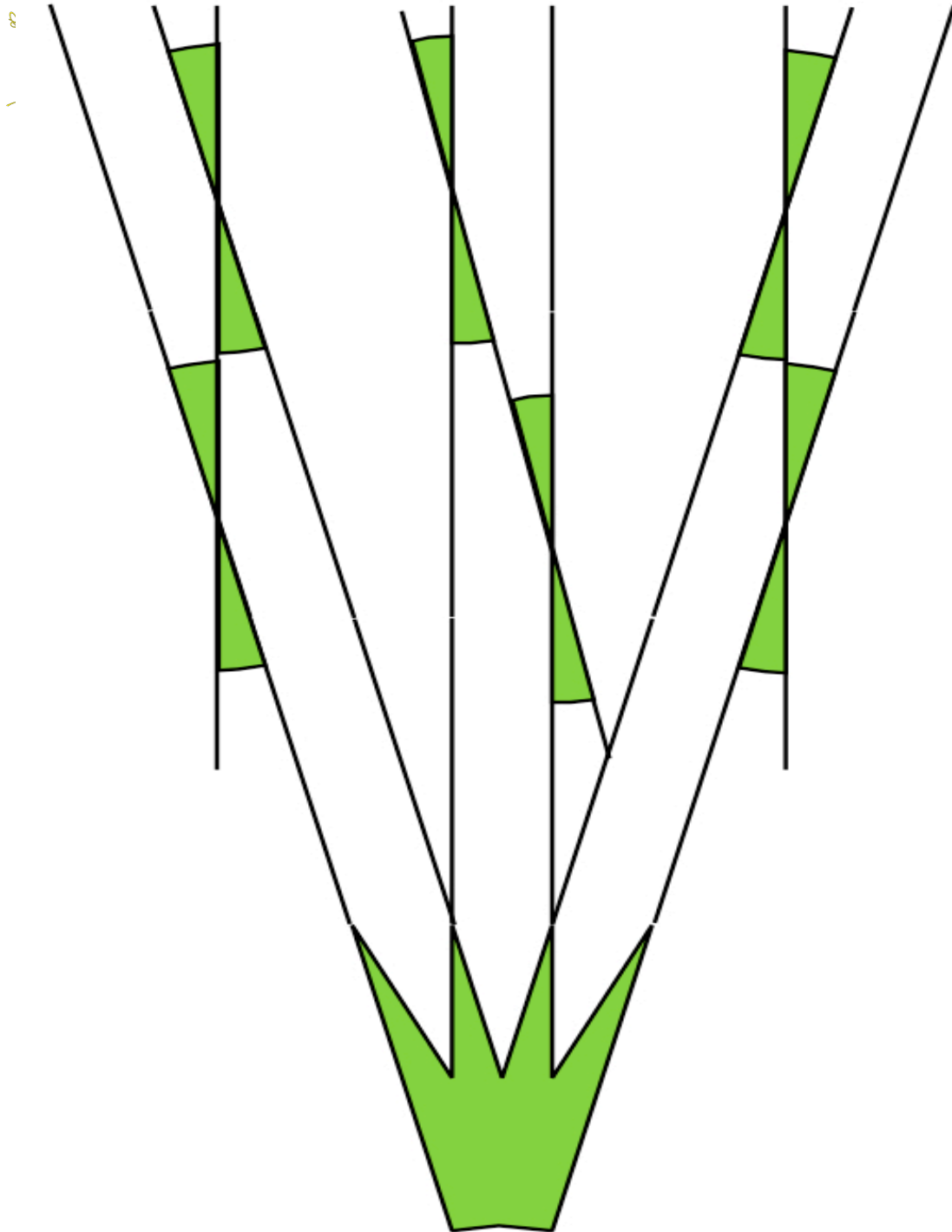
On voudrait maintenant amener l'aiguille de la position AB à une position parallèle CD. Le plus simple est de translater l'aiguille de AB à CD en balayant un parallélogramme, mais à nouveau, on voudrait trouver comment effectuer le déplacement en balayant la plus petite aire possible.



Comment faire mieux que le parallélogramme ABDC ? Quelle est la plus petite surface possible ?

8) Vers la solution

La page suivante montre un dessin imaginé par le mathématicien Besicovich ; on peut faire tourner l'aiguille de 45° tout en restant dans l'ensemble vert. Voyez-vous comment ?

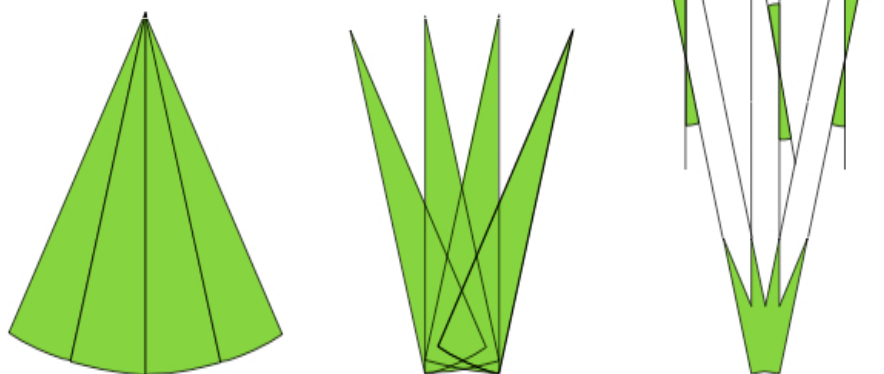




L'aiguille de Kakeya

L'idée de Besicovich consiste à découper le secteur angulaire en morceaux (quatre morceaux sur notre figure), à translater les morceaux pour qu'ils se chevauchent le plus possible, puis à ajouter un chouïa de surface pour rendre possible les transitions entre les différents morceaux. Il a calculé qu'en utilisant suffisamment de morceaux, on peut rendre l'aire finale aussi petite que l'on veut.

(Il faut vraiment **beaucoup de morceaux** ; par exemple, en utilisant **24 117 248** morceaux on peut diviser la surface initiale d'un facteur 5 ; pour avoir une aire 10 fois plus petite il suffit d'utiliser **12 393 906 174 523 604 992** morceaux...)



La réponse finale au problème de Kakeya est donnée par le **théorème de Besicovich (1928)** :

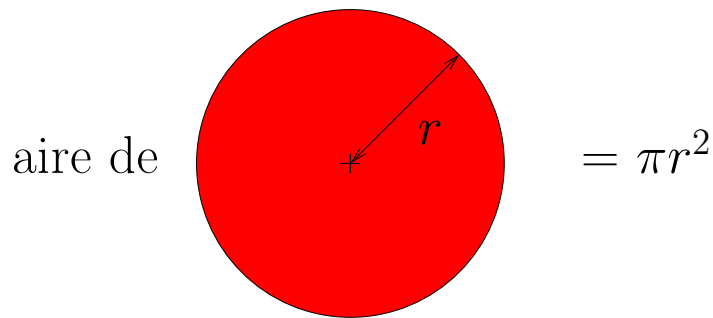
Si on suppose que l'aiguille est infiniment mince, on peut la retourner en balayant une surface aussi petite que l'on veut.

L'histoire ne s'arrête cependant pas en 1928 : des mathématiciens explorent actuellement un problème analogue en dimension supérieure, surtout depuis qu'en 1999 Jean Bourgain a mis en évidence un lien avec la répartition des nombres premiers.



Comment calculer des aires ?

Le disque de rayon r :



Le triangle équilatéral de côté l :

