

Soit un escalier à n marches.

On note u_n le nombre de façons de monter ces n marches.

Par exemple d'après l'énoncé, $u_3=3$.

Pour monter n marches, il faut d'abord monter la première.

Soit on la monte seule, il restera alors $n-1$ marches à monter et donc $u_{(n-1)}$ façons de les monter.

Soit on la monte avec la deuxième, et il restera alors $n-2$ marches à monter et donc $u_{(n-2)}$ façons de les monter.

On obtient que $u_n = u_{(n-1)} + u_{(n-2)}$.

Cette formule nous permet de calculer $u_4 = u_3 + u_2$.

On sait que $u_3=3$.

Pour monter deux marches, soit on les monte une à une soit on monte les deux d'un coup, ce qui nous donne $u_2=2$.

Et finalement $u_4=5$.

On peut continuer ces calculs, on obtient le tableau suivant:

<i>Nombre de marches</i>	<i>Nombre de facons de les monter</i>	<i>Nombre de marches</i>	<i>Nombre de facons de les monter</i>
3	3	11	144
4	5	12	233
5	8	13	377
6	13	14	610
7	21	15	987
8	34	16	1597
9	55	17	2584
10	89		

Bien sûr cette façon de faire ne permet pas d'avoir le nombre de façon de monter n marches!

Pour cela il faut étudier d'un peu plus près la suite des termes u_n .

Les connaisseurs auront reconnu la célèbre suite de Fibonacci!

C'est une suite classique dont nombre d'études existent sur la toile.

Vous pouvez par exemple regarder ici:

http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci

Les Shadoks et la numération

Voici les réponses aux différentes questions posées au stand « Shadok ».

Niveau Jaune

1. Pour compter en Shadok, il faut d'abord remplacer GA par 0, BU par 1, ZO par 2 et MEU par 3.

Donc BU ZO MEU est simplement 123.

Ensuite, il faut comprendre que :

- le dernier chiffre est le chiffre des « unités ». Dans l'exemple ci-dessus, on a donc 3 unités,
- l'avant-dernier chiffre est le chiffre des « quatraines ». Les quatraines remplacent les dizaines auxquelles on est habitué, ce sont des paquets de 4. Dans l'exemple ci-dessus, on a 2 quatraines ce qui compte pour $2 \times 4 = 8$,
- l'avant-avant-dernier chiffre est le chiffre des « seizaines ». Les seizaines remplacent les centaines auxquelles on est habitué, ce sont des paquets de $4 \times 4 = 16$. Dans l'exemple, on a 1 seizaine, qui compte pour 16,
- l'avant-avant-avant-dernier chiffre est celui des soixante-quatraines, qui sont des paquets de $4 \times 4 \times 4$, etc.

Ainsi BU ZO MEU vaut $123 = 16 + 8 + 3 = 25$.

2. Le même raisonnement donne :

$$\text{BU ZO GA MEU} = 1203 = (4 \times 4 \times 4) + 2 \times (4 \times 4) + 0 \times 4 + 3 = 64 + 32 + 3 = 99.$$

Une remarque pour la suite : pour abrégé, on note en général 4^3 au lieu de $4 \times 4 \times 4$.

3. Maintenant, pour exprimer 94 en langage Shadok, il faut trouver des paquets de 4 dans ce nombre. On voit que le plus gros paquet sera une soixante-quatraine : $94 = 64 + 30$. Dans 30, il y a une seizaine : $30 = 16 + 14$. Dans 14, il va trois quatraines : $14 = 3 \times 4 + 2$. Dans 2, il va 2 unités. Finalement :

$$94 = 64 + 16 + 3 \times 4 + 2 = 1 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 3 \times 4 + 2 \times 1.$$

La suite de chiffres importante est 1.1.3.2, et compte tenu du dictionnaire Shadok, ceci s'écrit BU BU MEU ZO.

4. C'est très facile, puisque BU ZO se traduit par 1.2 qui vaut $4 + 2 = 6$ et GA GA se traduit par 0 0 qui vaut 0... Ainsi BU ZO + GA GA vaut $6 + 0 = 6$.

Niveau Orange

1. Voir la question 2. (et les explications, dans la question 1.) du niveau Jaune.
2. Pour écrire 2009, il faut faire des paquets de 4 (on dit, les « puissances de 4 ») les plus gros possibles. Il faut d'abord connaître les puissances de 4 : ce sont 1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096... On calcule alors :

$$\begin{array}{rclcl} 2009 = 1024 + 985 & ; & 985 = 3 \times 256 + 217 & ; & 217 = 3 \times 64 + 25 \\ 25 = 16 + 9 & ; & 9 = 2 \times 4 + 1 & & \end{array}$$

Finalement $2009 = 1 \times 4^5 + 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 1 \times 4^0$ donne la suite de chiffres 1.3.3.1.2.1 qui se traduit en Shadok par BU MEU MEU BU ZO BU.

3. Pour écrire 1032_4 en base 10 on écrit simplement $1032_4 = 1 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 3 \times 4 + 2 = 64 + 12 + 2 = 78$.

4. On pose l'addition comme on le faisait à la petite école :

$$\begin{array}{rcccc} & & \textcircled{1} & \textcircled{1} & \\ & 1 & 0 & 3 & 2 \\ + & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Les chiffres entourés sont les retenues !

5. Ici encore, on pose la multiplication comme à la petite école. Je n'écris plus les retenues :

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & 0 & 3 \\ \times & & & 2 & 2 \\ \hline & & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \\ \hline 2 & 3 & 3 & 2 & \end{array}$$

Niveau Bleu

Les réponses aux premières questions sont données dans les corrigés Jaune et Orange. Voici pour les deux dernières questions :

5. On pose la soustraction comme on le faisait à la petite école, et comme le calcul ne s'arrête pas, on le pousse jusqu'à l'infini :

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & 1 & \\ & & & & - & 2 \\ \hline \dots & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

On peut vérifier que le calcul est correct en additionnant $\dots 3333$ et 2 : on doit trouver 1 ! Et en effet :

$$\begin{array}{rcccccc} \dots & 3 & 3 & 3 & 3 & \\ & & & & 2 & \\ \hline \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

5. On fait pareil qu'avant :

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & 2 & 2 \\ & & & - & 1 & 0 & 3 \\ \hline \dots & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{array}$$

Flocon de Van Koch – Rallye mathématique 2009

Voir les premières figures dans les pages jointes.

Nombre de côtés (jaune) :

Les côtés se comptent « à la main » pour les premières figures. La figure 1 a trois côtés, si on ne se trompe pas on doit trouver 12 côtés pour la figure 2 et 48 pour la figure 3... Ensuite il devient difficile de ne pas se tromper, ou au moins il est difficile d'être sûr que l'on ne s'est pas trompé.

Pour construire la figure 2 chaque côté de la figure 1 a été transformé, on est passé d'un segment

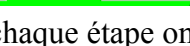
 à quatre segments . On a donc quadruplé le nombre de côtés. De même pour passer de la figure 2 à la figure 3, à chaque étape on multiplie le nombre de côtés par 4.

Figure n°	n	1	2	3	4	5	6	7	...
Nombre de côtés	c_n	3	12	48	192	768	3072	12288	...

Périmètre (orange) :

Le plus simple est d'utiliser le travail précédent. Dans chaque figure tous les côtés sont égaux, le périmètre est donc égal au nombre de côtés multiplié par la longueur de chaque côté. L'énoncé du problème indique (sur la figure) que la longueur du côté de la figure n°1 est 1.

Compte tenu de la construction, la longueur des côtés de chaque figure est égale au tiers de la longueur des côtés des figures précédentes.

On arrive donc à :

Figure n°	n	1	2	3	4	5	6	7	...
Longueur des côtés	l_n	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	...
Valeur approchée	(à 0,01 près)	1,00	0,33	0,11	0,04	0,01	0,00	0,00	...
Nombre de côtés	c_n	3	12	48	192	768	3072	12288	...
Périmètre	$p_n = l_n \times c_n$	3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{1024}{81}$	$\frac{4096}{243}$	...
Valeur approchée	(à 0,01 près)	3,00	4,00	5,33	7,67	9,48	12,64	16,86	...

Pour les plus à l'aise (bleu), il est facile de montrer avec ce qui précède que

–le nombre de côté est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 3, le nombre de côtés de la figure n est $c_n = 3 \times 4^{n-1}$,

–le périmètre est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme 3, le périmètre de la figure n est donc

$$p_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Aire (bleu) :

Le calcul de l'aire peut prendre plusieurs formes. Voici une proposition.

On peut de toute façon, dans un premier temps, pour ne pas trop se fatiguer, ne pas calculer l'aire de la figure 1 et calculer toutes les autres aires en fonction de celle-là. On l'appelle a . On a donc a = aire d'un triangle équilatéral de côté 1*. On note a_n l'aire de la figure n .

La construction de la figure 2 permet de dire que l'**aire de la figure 2** est la même que celle de la figure 1 mais à laquelle on a ajouté, pour chaque côté, un petit triangle équilatéral dont les côtés mesurent $\frac{1}{3}$. L'aire de chacun des petits triangles ajoutés est donc $\frac{1}{9} \times a$ (quand on multiplie par k les dimensions d'un objet son aire est multipliée par k^2). Il y a 3 petits triangles ajoutés (un par côté de la figure 1).

L'aire de la figure 2 vaut donc $a_2 = a + 3 \times \frac{1}{9} a = \left(1 + 3 \times \frac{1}{9}\right) \times a$.

De même, l'**aire de la figure 3** est la même que celle de la figure 2 mais à laquelle on a ajouté, pour chaque côté, un petit triangle dont les côtés sont encore divisés par 3. L'aire de chacun des petits triangles ajoutés est $\frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{9} \times a\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times a$. Il y a 12 triangles ajoutés (un par côté de la figure 2).

L'aire de la figure 3 vaut donc $a_3 = \left(1 + 3 \times \frac{1}{9}\right) \times a + 12 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times a = \left(1 + 3 \times \frac{1}{9} + 12 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2\right) \times a$.

On peut continuer ainsi : pour $n \geq 2$, l'aire de la figure n est celle de la figure $n-1$ augmentée d'autant de petits triangles qu'il y avait de côtés dans la figure $n-1$, chacun de ces petits triangles ayant une aire de $\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \times a$.

[Rappel : le nombre de côté de la figure $n-1$ est $3 \times 4^{n-2}$ (pour $n \geq 2$)]

Pour $n \geq 3$ on arrive à $a_n = \left(1 + 3 \times \frac{1}{9} + 12 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots + 3 \times 4^{n-2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) \times a$

qui s'écrit aussi $a_n = \left[1 + \sum_{k=2}^n \left(3 \times 4^{k-2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right)\right] \times a$

et en simplifiant un peu : $a_n = a + \frac{a}{3} \times \sum_{k=2}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-2} = a + \frac{a}{3} \times \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{9}\right)^k = a + \frac{a}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}}$.

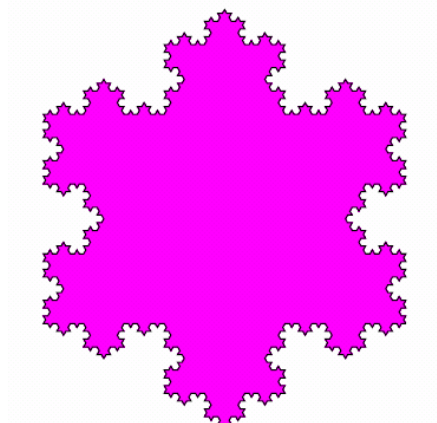
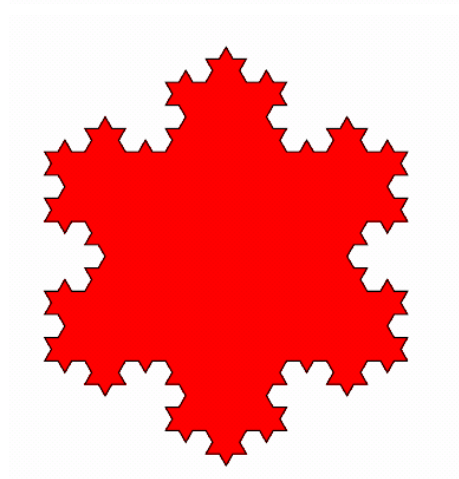
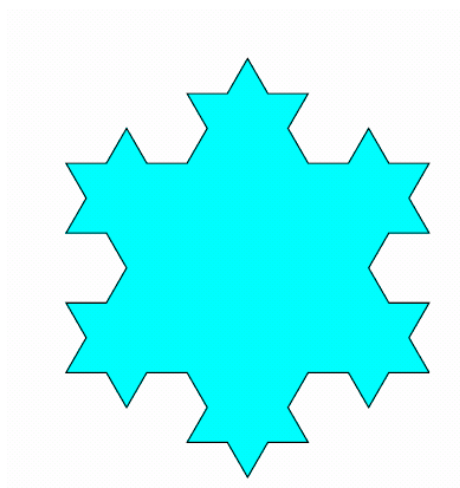
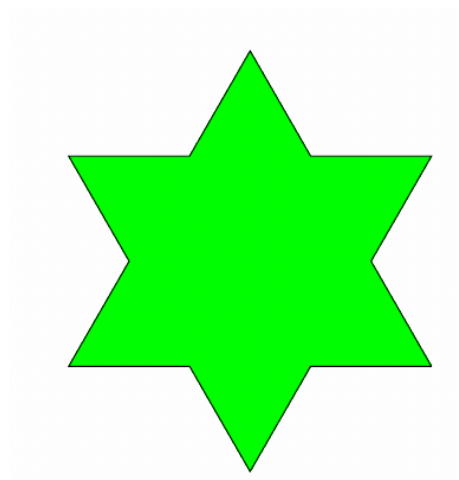
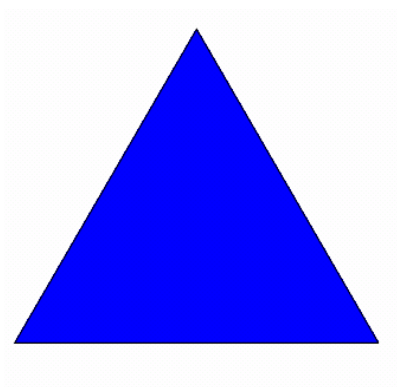
On peut conclure en observant le comportement à l'infini du périmètre et de l'aire :

-d'une part $\lim_{i \rightarrow +\infty} p_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} = +\infty$

-et d'autre part $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = a + \frac{a}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = a + \frac{a}{3} \times \frac{9}{5} = a + \frac{3a}{5} = \frac{8a}{5}$

On a donc une suite de figures dont le périmètre devient aussi grand que l'on veut (tend vers l'infini) et dont l'aire est limitée.

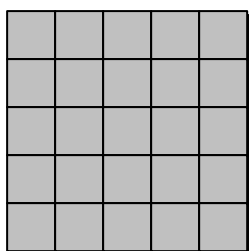
* Le calcul nombre a est laissé au lecteur, il est simple d'utiliser la formule de l'aire d'un triangle, ça nécessite un petit détour par le théorème de Pythagore.



... ?

Chasse à la bête

Aucune *bête* ne doit pouvoir pénétrer sur le *territoire*. On dispose de *pièges*, pour empêcher les bêtes de se poser. Une bête est un *polymino* formé de quelques cases.



Piège :



Des bêtes : domino ou trimino



Un territoire

L'enjeu est de disposer le plus petit nombre de pièges sur le territoire.

Sur le problème ...

Ce problème est caractéristique des problèmes *d'optimisation*. En effet, pour montrer la valeur optimale, il convient d'une part d'exhiber une solution de cette valeur (il suffit) et d'autre part, faire une preuve montrant que l'on ne peut pas faire mieux (il faut). Il existe toujours une solution puisqu'en plaçant des pièges sur chaque case, on est sûr de piéger n'importe quelle bête.

Le problème de recherche mathématique dont est issue cette situation est dû à Golomb (1994)¹ qui a travaillé sur le problème d'exclusion des pentominos². Paul Dorbec (Université Joseph Fourier, Grenoble)³ a utilisé la Chasse à la bête dans sa thèse, comme présentation ludique du problème mathématique qu'il a traité (problème d'empilement et de recouvrement en théorie des graphes). On pourrait travailler sur un problème encore plus général, avec des territoires et des bêtes plus compliqués par exemple, ou en chassant plusieurs bêtes à la fois. Dans le cas général, ce problème est

¹ Golomb S.W. (1994). *Polyominoes – Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Princeton Science Library, Princeton, NJ.

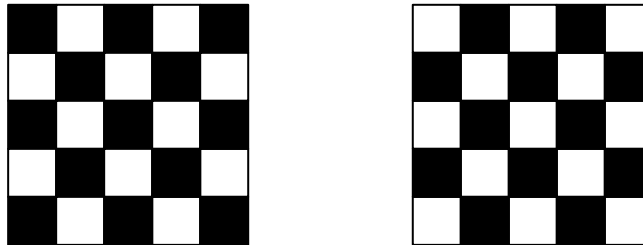
² Voir aussi Gravier S. et Payan Ch. (2001). On the pentomino exclusion problem, *Discrete and Computational Geometry*, 26:375-386.

³ Dorbec, P. (2007). *Empilements et recouvrements*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne: <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00181722/fr/>

encore ouvert dans la recherche actuelle.

Chasse à la bête « domino » sur un carré 5 par 5

Il existe une solution à 13 pièges ... et une solution à 12 pièges.



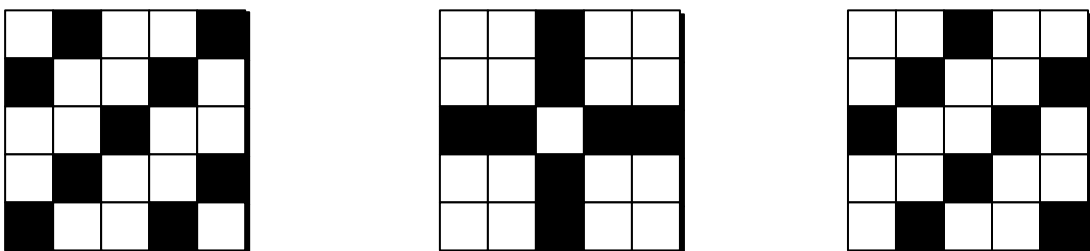
Comment pouvons-nous démontrer que 12 est la solution optimale dans cette configuration ? Nous pouvons facilement montrer que 12 bêtes « domino » peuvent se poser sur le territoire 5×5 : ainsi, 12 pièges « au moins » sont nécessaires (c'est ce qu'on appelle une borne inférieure). Il suffit alors d'exhiber une solution à 12 pièges pour pouvoir conclure que 12 est effectivement la solution optimale.

On a ainsi démontré qu'il fallait 12 pièges pour empêcher la bête domino de se poser sur le carré 5 par 5.

On a utilisé l'argument suivant : si on peut placer x bêtes sur le territoire sans qu'elles ne se chevauchent, alors il faut au moins x pièges pour chasser la bête du territoire.

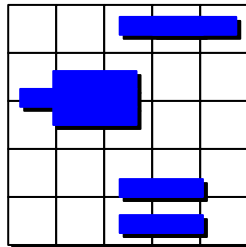
Chasse à la bête (trimino long) sur un carré 5 par 5

Voici des solutions n'utilisant que 8 pièges :



Il nous faut maintenant le démontrer.

– **Première preuve possible** : on dispose le plus grand nombre possible de bêtes sur le territoire. Il est possible d'en placer 8.



Il nous faut donc au moins 8 pièges pour empêcher les bêtes de se poser, et nous avons trouvé des solutions n'utilisant que 8 pièges.

On a ainsi montré que 8 pièges sont nécessaires pour empêcher la bête trimino long de se poser sur le carré 5 par 5.

(Remarque : cette technique est facilement généralisable à d'autres tailles de territoire. Pour un rectangle de taille n par m , on obtient $\lfloor nm/3 \rfloor$ pièges.)

– **Deuxième preuve possible** : on va construire cette preuve en utilisant des arguments sur les lignes et les colonnes du territoire.

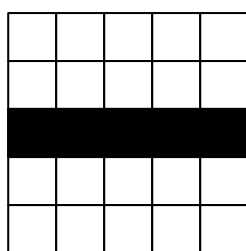
On étudie quelle est la (ou les) case(s) devant contenir un piège sur une colonne et on poursuit le raisonnement sur les colonnes suivantes.

Pour empêcher la bête de se poser sur une colonne, il nous faut au moins un piège. Si on ne place qu'un piège sur cette colonne, il nous faut le placer sur la case « du milieu » (on note cet argument *).

On pourrait utiliser le même argument sur les lignes.



Il nous faut donc au moins 5 pièges pour les cinq colonnes qui composent notre territoire. Mais des bêtes peuvent encore se poser, ce n'est donc pas une solution.



On sait donc qu'il nous faut au moins 6 pièges. Avec 6 pièges, quatre colonnes auront un piège chacune (placé au milieu, toujours avec l'argument *) et la colonne restante en aura deux. Ainsi, il y a au moins deux pièges sur 4 lignes et quatre pièges sur une ligne. Ce qui est encore insuffisant. On remarque que si l'on place un piège sur chacune de ces lignes, on trouve la deuxième solution à 8 pièges.

On sait maintenant qu'il nous faut au moins 7 pièges. Supposons qu'elle existe. Dans une telle solution, au moins 3 colonnes contiennent exactement un piège, placé au milieu. Ces trois colonnes ne peuvent pas être consécutives car sinon, une bête pourra se poser. Si deux de ces colonnes sont consécutives, alors chaque colonne adjacente doit contenir au moins 4 pièges pour empêcher la bête de se poser. 4 pièges sur une colonne et au moins un piège pour chacune des autres colonnes donnent 8 pièges, ce qui est trop. Ainsi, les colonnes contenant un piège ne sont pas adjacentes : ce sont les colonnes n°1, 3 et 5. En utilisant l'argument * sur les lignes, cela implique que chaque ligne excepté celle du milieu a exactement un piège. Ce n'est pas possible quand la colonne du milieu a un piège seulement.

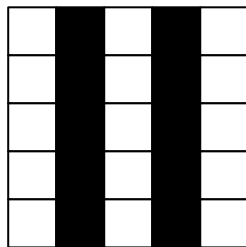
Ainsi, 8 pièges sont nécessaires. OUF !

Chasse à la bête



(trimino en L) sur un carré 5 par 5

L'argument de pavage par des bêtes ne suffit plus car on ne peut mettre que 8 bêtes dans un carré 5 par 5 alors que la meilleure solution obtenue utilise 10 pièges.



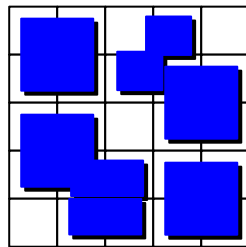
On obtient alors, seulement, un **encadrement** sur la valeur de l'optimum. De tels résultats sont courants dans les problèmes de recherche. Toutefois, on peut dans ce cas précis raffiner la preuve par pavage afin de montrer que 10 sont nécessaires.

On remarque tout d'abord que la bête se place en fait sur un carré 2 par 2. Il

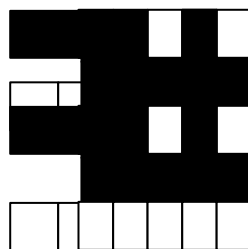
nous faut alors un piège pour la bête posée sur ce carré 2 par 2 et encore un piège supplémentaire sur la case restante afin qu'une autre bête « voisine » ne viennent pas empiéter sur notre carré 2 par 2.

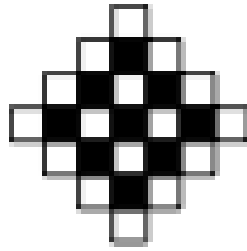


Ainsi, pour chaque carré 2 par 2, il nous faut 2 pièges. On essaie alors de disposer ces blocs 2 par 2 sur le territoire. « Au pire », on en a 4 (on peut faire la liste des différents cas possibles) et deux bêtes peuvent encore se poser : il nous faut donc 4×2 pièges plus 2, c'est-à-dire **10 pièges** pour empêcher la bête de se poser.



Autre argumentation possible : on raisonne sur les colonnes du territoire. Vu la forme de la bête, on va regarder ce qu'il se passe sur les 2 premières colonnes. Au mieux, on peut disposer 4 pièges pour empêcher la bête de se poser (deux bandes de deux). On raisonne ensuite sur les deux colonnes suivantes et enfin sur la dernière colonne. On obtient alors la solution à 10 pièges :

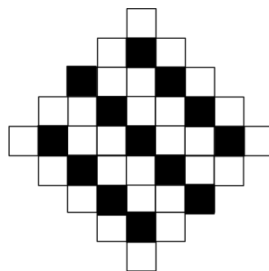




Solution à 9 pièges

Une bête domino recouvre 2 cases qui se touchent. On peut voir ce territoire comme un sous-ensemble du carré 7 par 7 et construire la solution ci-dessus de proche en proche en raisonnant sur les lignes ou les colonnes et en plaçant un piège toutes les deux cases.

Chasse à la bête trimino long sur le territoire T3



Solution à 13 pièges