

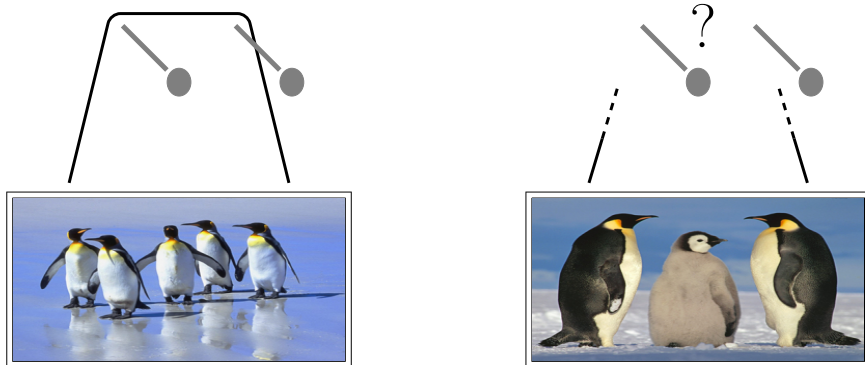


Des ficelles et des clous

Les murs de la maison de Tonton Roger n'étaient pas très solides. Aussi arrivait-il souvent, lorsque l'un d'entre nous se jetait contre la cloison à l'issue d'une course-poursuite effrénée, que sous l'effet des vibrations un clou se détache du mur ; le fracas d'un tableau s'écrasant au sol précédait alors de peu le rugissement de colère légendaire de notre oncle. Un jour que notre agitation avait causé la chute d'un tableau auquel il tenait tout particulièrement, Tonton Roger nous ordonna de le raccrocher. « Je veux qu'il soit tenu par *deux* clous, comme ça, si l'un des deux se détache du mur, l'autre empêchera le tableau de tomber. Au travail ! »

L'oncle était tellement remonté qu'il n'y eut pas moyen de se défilier. Mais notre esprit farceur reprit vite le dessus lorsque Nadine, la plus espiègle d'entre nous, nous montra comment accrocher le tableau à ses deux clous de façon à ce que, *si l'un des deux se détache, n'importe lequel, le tableau tombe inmanquablement par terre !*

Question 1. Comment Nadine accroche-t-elle les tableaux ?

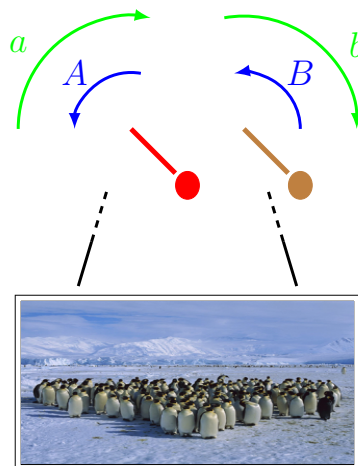




Pour décrire le parcours de la ficelle autour des deux clous, Nadine utilise un mot formé des lettres a, A, b, B , en écrivant

- a quand la ficelle tourne autour du **clou de gauche** dans le **sens des aiguilles d'une montre**,
- A quand la ficelle tourne autour du **clou de gauche** dans le **sens inverse**,
- b quand la ficelle tourne autour du **clou de droite** dans le **sens des aiguilles d'une montre**,
- B quand la ficelle tourne autour du **clou de droite** dans le **sens inverse**.

Par exemple, la façon dont Tonton Roger aurait suspendu ses tableaux, représentée sur le dessin de gauche de la page précédente, est codée par le mot ab .

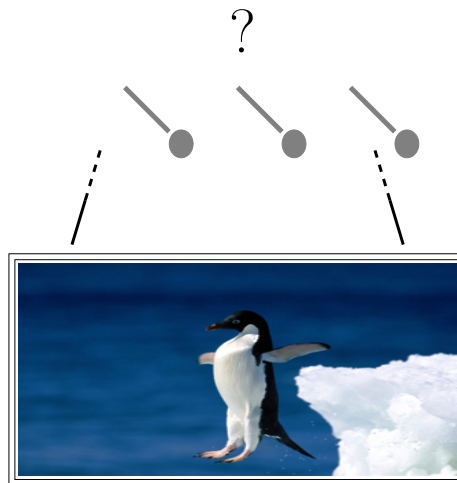


Question 2. Quel est le mot qui décrit votre réponse à la question 1 ? Pouvez-vous décrire *toutes* les réponses possibles à cette question ?



Bien sûr, Tonton Roger s'aperçut vite que le tableau était accroché d'une façon très louche. Voulant en avoir le coeur net, il décrocha l'un des clous et... rattrapa de justesse le tableau qui tombait. Heureusement, en plus d'un goût immodéré pour la peinture et pour les colères soudaines, Tonton faisait preuve d'une grande curiosité. Au lieu de s'énerver, il nous mit au défi de faire la même chose avec **trois** clous : placer la ficelle de façon à ce que dès qu'on enlève l'un des trois clous, n'importe lequel, le tableau tombe.

Question 3. Saurez-vous relever le défi de Tonton Roger ?



Stand Dominos, triominos...



Tout le monde a déjà joué aux dominos.



Les triominos sont des versions triangulaires des dominos, comme sur la photo.

Stand

Dominos, triominos...

- A. Combien y a-t-il de dominos dans une boîte de dominos ?
- B. Et si on utilisait jusqu'à n points où n est un entier ?
- C. Combien y a-t-il de triominos comportant les chiffres 0, 1 et 2 ?
- D. Et si on utilisait les nombres 0, 1, ..., n ? Sauriez-vous le démontrer ?



Grand froid sur la banquise

Sur la banquise en hiver, les manchots empereurs veulent se tenir chaud ! Ils se regroupent en un tas très compact qu'on appelle une "tortue". Aidons-les à résoudre le problème suivant : si 20 manchots sont volontaires pour rester sur le bord de la tortue en se gelant le bout des ailes, quelle forme doit avoir cette tortue pour que le plus grand nombre possible de manchots soient protégés à l'intérieur de la tortue ?



© CNRS Photothèque/IPEV ; UPR9010 – CEPE – Strasbourg

On peut reformuler ce problème de façon mathématique. Cela revient à chercher quelle forme, à périmètre fixé, a la plus grande aire possible. Cette question est en fait très complexe. Simplifions-la ! Peut-on répondre à cette question si les seules formes qu'on s'autorise sont des polygones ?



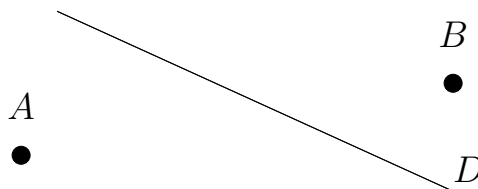
1) Chemin le plus court

Regardons d'abord un problème plus simple...

a) Quel est le plus court chemin entre les points A et B dans la figure ci-dessous ?



b) Même question si on impose que ce chemin coupe la droite D ?



c) Et dans ce cas de figure ? Comment peut-on se ramener à la question précédente ?



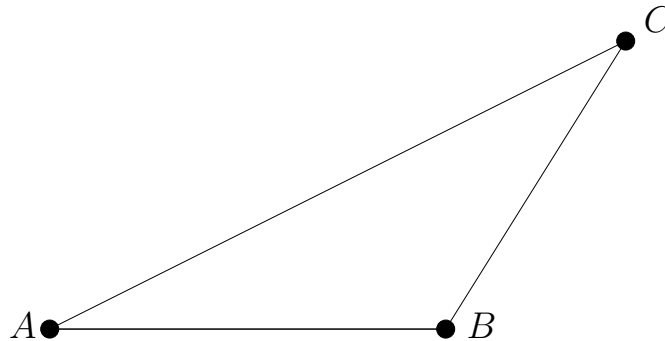


2) Triangle



© CNRS Photothèque/IPEV – PIERRE Katell
UPS2928 – Institut Polaire – Plouzané

On se fixe la base AB d'un triangle ABC .

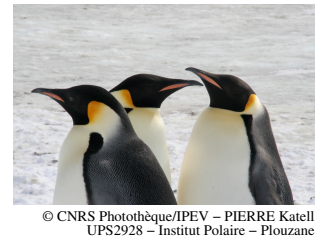


- a) Comment bouger le sommet C pour que le triangle conserve la même aire ?
- b) Où placer C pour que, toujours en conservant la même aire, le périmètre du triangle soit minimal ?
- c) Comment déplacer C à nouveau pour obtenir un triangle de même périmètre que celui dessiné sur cette page mais d'aire plus grande ?
- d) Si on s'autorise maintenant à déplacer A et B , quel est donc le triangle à périmètre fixé qui a la plus grande aire ?

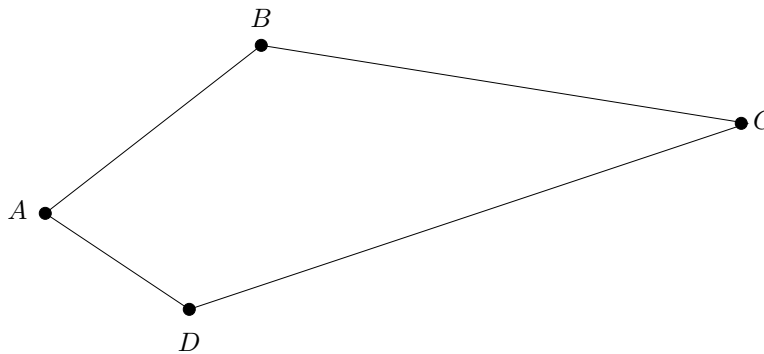




3) Quadrilatère



On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ ("quadri" signifie 4, "latère" signifie côté) .



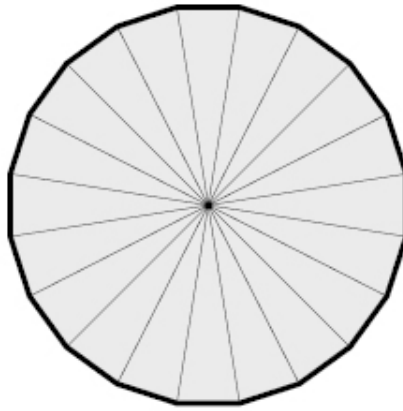
a) Comment déplacer les sommets A et C , puis B et D , pour obtenir un losange (quadrilatère dont tous les côtés sont de même longueur) de même périmètre que $ABCD$ mais d'aire plus grande ?

b) Pouvez-vous déformer ce losange à périmètre fixé pour maximiser son aire ? Quel est donc le quadrilatère à périmètre fixé qui a la plus grande aire ?





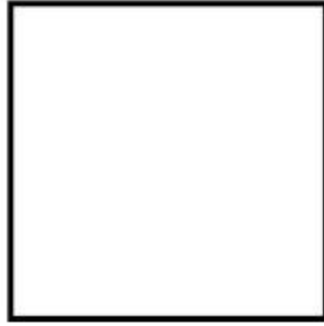
4) Pour aller plus loin



- a) A votre avis, quel est le polygone à n côtés d'aire maximale à périmètre fixé ?
- b) Pouvez-vous calculer son aire ? La comparer à celle d'un disque de même périmètre ?
- c*) Pouvez-vous prouver que votre intuition en a) est la bonne ?
- Montrez que tous les côtés du polygone doivent être égaux.
 - Montrez que deux angles non adjacents ("voisins") doivent être égaux.
 - Montrez finalement que tous les angles sont égaux.

Même aire et p pair

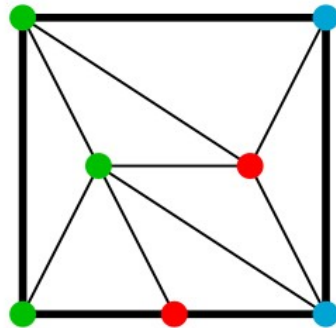
1) Sauriez-vous découper un carré en 2 triangles égaux ? En 4 ?



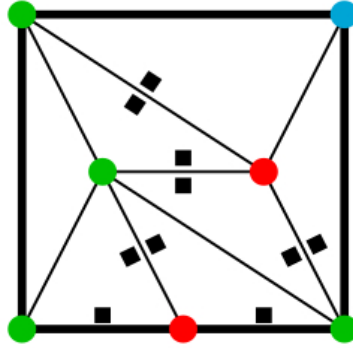
2) Et en 6 ? En un nombre pair de triangles ? Et en 5, 7 ?

En fait on ne peut pas partager équitablement un sandwich (carré !) en un nombre impair de sandwiches triangulaires. Tâchons de voir pourquoi :

3) Partons d'un partage quelconque et colorons les sommets des triangles :



Pour chaque segment   on place un  sur chaque côté qui se trouve à l'intérieur du carré :



En regroupant de deux manières différentes les  montrer que le nombre de triangles    a la même parité que le nombre de segments   sur le bord du carré.

Pour n'importe quel partage et quelle que soit la manière dont on a colorié les sommets !

$$x = 2^n \cdot \frac{a}{b}$$

Toute fraction x s'écrit

avec a et b impairs et n un nombre entier (peut-être négatif). Ainsi si $x=12/5$ on a $n=2$, $a=3$ et $b=5$, et si $x=7/8$ on a $n=-3$, $a=7$ et $b=1$. Par convention on pose $n=+\infty$ si $x=0$.

Dans le carré unité, on colorie un sommet de coordonnées (x, x') selon la règle :

-  si les entiers n et n' associés à x et x' sont >0
-  si $n \leq 0$ et $n \leq n'$
-  si $n' \leq 0$ et $n > n'$

4) Colorier les sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ du carré. Quelles couleurs voit-on sur les différents côtés du carré ?

5) En comptant les segments   sur le périmètre du carré montrer qu'il existe au moins un triangle   

Reste à comprendre ce que les triangles    ont de particulier : si U est l'aire d'un triangle    , par exemple de sommets

$$\text{red smiley} = (0,0) \quad \text{green smiley} = (x,y) \quad \text{et} \quad \text{blue smiley} = (x',y'),$$

alors $U = (xy' - x'y)/2$ et un calcul élémentaire, que nous admettons, montre que U est une fraction de la forme

$$2^n \cdot \frac{a}{b}$$

avec $n < 0$.

6) En déduire que si dans notre partage du carré tous les triangles ont une même aire, alors il y a un nombre pair de triangles.